P
9

AGB

P 9

R. B. GYMNAS: BIBLIOTH.
BAMBERG

P 9

ALGEBRAISCHE GLEICHUNGEN

NEBST

DEN RESULTATEN

UND

DEN METHODEN ZU IHRER AUFLÖSUNG.

VON

Dr. ERNST BARDEY.

K. K. UNIVERSITÄTS-BIBLIOTHEK INNSBRUCK

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1868.

STAATSBIBLIOTHEK
BAMBERG

DEM

HERRN PROFESSOR H. KARSTEN

ZU

ROSTOCK

ALS EIN ZEICHEN

SEINER

VEREHRUNG UND DANKBARKEIT

DER VERFASSER.

Vorwort.

Die Veranlassung zur Abfassung dieses Buches lag für mich in zwei Umständen. Erstens habe ich beim mathematischen Unterricht, den ich Schülern von mehr als fünf Gymnasien und verschiedenen Realschulen ertheilte, vielfach erfahren, dass gerade solche Aufgaben, wie sie hier vorgelegt werden, Aufgaben, welche man auf den Schulen kurz unter dem Namen „quadratischer Gleichungen“ begreift, mit grosser Vorliebe und besonderem Interesse gerechnet werden. Zweitens sind in den Lehrbüchern und Aufgabensammlungen die Aufgaben dieser Art nur in geringer Anzahl vertreten; die interessanteren finden sich in der bekannten Sammlung von M. Hirsch. Daher sind hier solche Gleichungen in Menge aufgestellt und zugleich die Methoden angegeben, durch welche dieselben möglichst einfach gelöst werden.

Alle vorkommenden Gleichungen sind quadratischer Natur. Einfache Gleichungen sind nur des Vergleichs halber ausnahmsweise angeführt, und wenn auch sehr viele Gleichungen vom 4. oder scheinbar von einem höheren Grade sind, wenn auch bei manchen Aufgaben mit zwei Unbekannten die Elimination der einen Unbekannten für die andere eine Gleichung liefert, welche über den 20. und selbst 30. Grad hinauszugehen scheint, so sind doch alle Aufgaben der Art, dass ihre Auflösung mit Hülfe quadratischer Gleichungen beschafft werden kann. Es kommt keine Aufgabe vor, zu deren Auflösung die Auflösung einer kubischen Gleichung erforderlich wäre. Oft wird man freilich nur durch eine geeignete Behandlung eine Gleichung

höheren Grades vermeiden; sie lässt sich jedoch immer vermeiden. Wie dies geschieht und wie man auf dem einfachsten und kürzesten, oder dem allgemeinsten Wege zur Lösung gelangt, zeigen die zur Auflösung gegebenen Methoden, welche, wie es mir dem Zwecke des Buches mehr zu entsprechen schien, den einzelnen Aufgaben beigefügt und nicht in einem besonderen Kapitel für sich allein abgehandelt sind.

Im Allgemeinen sollten die Aufgaben so beschaffen sein, dass man sie auf den Schulen schon zu den schwierigeren zählt. Leichtere Aufgaben konnten jedoch aus mehrfachen Gründen nicht ausgeschlossen werden. Manche sind des Vergleiches halber oder der grösseren Vollständigkeit wegen angeführt, manche, um an sie die zu machenden Bemerkungen zu knüpfen oder auf sie die gemachten Erörterungen anzuwenden, eine grössere Anzahl endlich, weil ich sie für interessant genug hielt, unter den schwierigeren Aufgaben einen Platz einzunehmen.

Ausserdem haben mich bei der Aufnahme und Aufstellung der Aufgaben hauptsächlich zwei Gesichtspunkte geleitet: erstens solche Gleichungen zu liefern, deren Bearbeitung dem Schüler Interesse gewährt; zweitens zu zeigen, wie vielfach, verschiedenartig und oft scheinbar schwierig die Aufgaben sein können, welche sich mit alleiniger Hülfe quadratischer Gleichungen lösen lassen.

Interessant kann eine Gleichung sein vorzugsweise hinsichtlich ihrer Form, oder hinsichtlich ihres Resultates und insonderheit der Form ihres Resultates. Manche Gleichung hat in ihrer Form eine gewisse Symmetrie, sie ladet den Schüler gleichsam ein, sie zu behandeln und ihre Auflösung zu versuchen. Bei manchen ist das Resultat ansprechend; der Schüler fühlt sich für die Mühe der Auflösung belohnt, wenn er ein unerwartet einfaches oder seiner Form wegen eigenthümliches Resultat findet. Auch hinsichtlich ihrer Bedeutung oder Anwendung, wie hinsichtlich der Art ihrer Auflösung können Gleichungen von Interesse sein. Dass nicht alle Gleichungen in jeder Beziehung interessant sind, ist natürlich. Wer jedoch die hier gelieferten Gleichungen näher ansieht, wird, wie ich hoffe, das Bestreben in dieser Richtung nicht verkennen; und wenn ich die Worte eines vielerfahrnen Lehrers

und Professors, „er halte es für gar nicht leicht, eine interessante quadratische Gleichung zu bilden“, als gegründet anerkennen und für mich in Anspruch nehmen wollte, so könnte ich ungeachtet aller Einfachheit des Gegenstandes geneigt sein, mir einiges Verdienst beizumessen.

Was den zweiten Punkt, die Mannigfaltigkeit und Schwierigkeit der Aufgaben betrifft, deren Auflösung auf so einfachen Voraussetzungen beruht, so wird der Sachkundige gewiss zugeben, dass ich denselben in ziemlich umfassender Weise erledigt habe. Die Anzahl der in den Lehrbüchern und Aufgabensammlungen vorkommenden Aufgaben dieser Art ist jedenfalls nur eine geringe gegen die Anzahl der hier gelieferten. Diese beläuft sich mehr durch Zufall, als in Folge einer Absicht gerade auf 1000. Ursprünglich ging sie über 2500 hinaus; da jedoch eine solche Menge von Aufgaben für den vorgestellten Zweck zu gross und das Buch zu voluminös wurde, so habe ich über die Hälfte der Aufgaben gestrichen und bin der Ansicht, dass diese Reduction dem Buche um so eher Eingang verschaffen wird. Die wenigen Aufgaben, welche nicht von mir herrühren, habe ich, soweit meine Erinnerung und Notirung reicht, wenn sie nicht ganz allgemeiner Natur sind, an der Nummer mit Anführungszeichen versehen. Alle übrigen sind von mir selber aufgestellt.

Für die Anordnung der Aufgaben sind die Schwierigkeit und Aehnlichkeit massgebend gewesen. Die Natur derselben brachte es mit sich, dass im ersten Theil und in den beiden ersten Abtheilungen (A und B) des zweiten Theiles zunächst die Schwierigkeit und dann die Aehnlichkeit berücksichtigt worden und somit die Aufeinanderfolge eine stufenmässig fortschreitende ist. In der dritten Abtheilung des zweiten Theils (C) und im dritten Theil ist die Aehnlichkeit vor der Schwierigkeit in Betracht gezogen, und die Aufgaben sind gruppenartig aneinandergereiht. Obwohl eine ziemliche Sorgfalt auf die Anordnung der Aufgaben verwendet ist, hat es wegen der Verschiedenheit derselben doch nicht vermieden werden können, dass ähnliche Aufgaben auseinandergerissen sind und leichtere Aufgaben zwischen den schwierigeren stehen. Aus diesen Gründen liess sich die Art der Aufgaben nicht immer mit wenigen Worten angeben und die Ueberschriften in den

Abtheilungen des ersten und zweiten Theils können fast nur zur oberflächlichen Orientirung dienen.

Die meisten Gleichungen sind in Buchstaben gegeben. Viele würden an ihrer Eigenthümlichkeit nnd an ihrem Interesse etwas verlieren, wenn sie rein numerisch wären. Nur bei solchen Gleichungen, welche für die Lösung auf verwickelte Formeln von keinem Interesse führen, sind ausschliesslich Zahlen angewendet. Bei manchen ist der allgemeine Fall in Buchstaben behandelt, und es sind besondere Beispiele in Zahlen hinzugefügt.*)

Hoppenrade, im Februar 1868.

E. Bardey.

---

*) Soeben, als ich das Vorwort zu schliessen im Begriff bin, kommt mir ein Buch von Miles Bland, deutsch von Celsus Girl, zu Gesicht, welches den vielversprechenden Titel „**sämmtliche** algebraische Gleichungen“ hat. Ohne weiter auf seinen Inhalt einzugehen, bemerke ich nur, dass es im Ganzen 143 quadratische Gleichungen enthält, die zum Theil sehr einfacher Art sind; quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten etwa 60. Quadratische Gleichungen mit drei und mit vier Unbekannten kommen gar nicht vor.

Bezeichnungen und Abkürzungen.

1. Die im Text vorkommenden römischen Zahlen I und II beziehen sich auf den ersten und zweiten Theil, die arabischen Zahlen auf die betreffenden Nummern der Aufgaben. Steht bei der Zahl keine I oder II, so ist die Nummer desselben Theils gemeint.

2. Die Quadratwurzeln sind fast durchgehends nur mit einem Zeichen versehen, ihre Doppeldeutigkeit ist als selbstverständlich angenommen. Sie können in den Resultaten überall auch ebenso gut das entgegengesetzte Zeichen haben. — Ist für eine Quadratwurzel der Kürze halber ein Buchstabe, r oder t, gesetzt, so hat auch dieser meist nur ein Zeichen erhalten und seine Doppeldeutigkeit ist nicht weiter bezeichnet.

3. Irrationale Grössen und Lösungen von Gleichungen haben bekanntlich dieselbe Benennung Wurzeln. Was gemeint ist mit diesem Wort, lehrt oft nur der Zusammenhang. Wo vom Fortschaffen einer Wurzel, von ihrer Mehrdeutigkeit oder der Wurzel eines Grades geredet wird, ist die irrationale Grösse gemeint; wo von den Wurzeln einer Gleichung geredet wird, sind es die Lösungen derselben.

4. Das L. hinter jeder Aufgabe bedeutet Lösung oder Lösungen.

5. Sind a und b die Wurzeln einer Gleichung, so ist statt der gewöhnlichen Schreibart

$$x_1 = a \quad x_2 = b$$

meistens kurz geschrieben

$$x = a, b.$$

Bei Zahlen kann das Komma nicht zu Missverständnissen führen, da kein Decimalkomma vorkommt. — Steht demnach als Lösung

$$x = a, \sqrt{a^2 + b^2},$$

so heisst das wegen 2. nach der gewöhnlichen Bezeichnung

$$x_1 = a, \; x_2 = + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad x_3 = - \sqrt{a^2 + b^2},$$

6. Aehnlich ist die Abkürzung der Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Statt der gewöhnlichen Bezeichnung bei einer Aufgabe mit zwei Unbekannten und drei Wurzelpaaren

$$x_1 = a_1 \quad x_2 = a_2 \quad x_3 = a_3$$
$$y_1 = b_1 \quad y_2 = b_2 \quad y_3 = b_3$$

ist kurz geschrieben

$$x = a_1, a_2, a_3$$
$$y = b_1, b_2, b_3;$$

oder auch neben einander

$$x = a_1, a_2, a_3 \quad y = b_1, b_2, b_3.$$

7. Die oft vorkommende Abkürzung corr. Add. heisst correspondirende Addition und bezieht sich auf I, 18.

Inhaltsverzeichniss.

Erster Theil.

Gleichungen mit einer Unbekannten.

		Seite
A.	Reine quadratische Gleichungen (Nr. 1—83)	1
B.	Vollständige quadratische Gleichungen einfachster Art (Nr. 84—190)	15
C.	Kubische Gleichungen mit einer ausgezeichneten oder mit einer leicht erkennbaren Wurzel (Nr. 191—244)	36
D.	Complicirtere quadratische Gleichungen, insonderheit von der Form $Ax^{2n} + Bx^n + C = 0$, Gleichungen mit geometrischer Deutung etc. (Nr. 245—364)	43
E.	Gleichungen des 4. Grades, deren Auflösung mit Hülfe quadratischer Gleichungen beschafft werden kann (Nr. 365—492). .	76

Zweiter Theil.

Gleichungen mit zwei Unbekannten.

A.	Gleichungen meist homogenen Charakters. Erste Stufe. (Nr. 1—181)	119
B.	Gleichungen meist homogenen Charakters. Zweite Stufe. (Nr. 182—314)	157
C.	Gleichungen verschiedenen Charakters (Nr. 315—394)	207

Dritter Theil.

Gleichungen mit drei und vier Unbekannten.

A.	Gleichungen mit drei Unbekannten (Nr. 1—77)	239
B.	Gleichungen mit vier Unbekannten (Nr. 78—114)	264

Erster Theil.

Gleichungen mit einer Unbekannten.

A.

Reine quadratische Gleichungen.

1. $(x + a + b)\,(x - a + b) + (x + a - b)\,(x - a - b) = 0.$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Gleichungen, welche ungeändert bleiben, wenn man x überall das entgegengesetzte Zeichen giebt, können nur gerade Potenzen von x enthalten.

So geht in dieser Gleichung, wenn man $-x$ statt x setzt, das 1. Glied in das 2. und das 2. Glied in das 1. über, die Gleichung ändert sich also nicht.

Bei der Auflösung solcher Gleichungen hat man daher nur auf die Glieder mit geraden Potenzen von x zu achten, d. h. bei quadratischen Gleichungen nur auf die Glieder mit x^2 und die ohne x. Die Glieder mit den ungeraden Potenzen von x fallen von selbst fort.

Gleichungen dieser Art sind 1., 2., 6., 7. u. s. w. Genau genommen gehören alle reinen quadratischen Gleichungen hierher, doch lässt sich das nicht immer sofort übersehen.

2. $(a + x)\,(b + x) + (a + x)\,(b - x) + (a - x)\,(b + x) + (a - x)\,(b - x) = c.$

L. $x = \infty$ *).

3. $(a + bx)\,(b - ax) + (b + cx)\,(c - bx) + (c + ax)\,(a - cx) = 0.$

L. $x = \pm 1$.

Auch hier, wie in 4. und 5., lässt sich leicht übersehen, dass die Glieder mit x sich fortheben.

---

*) Vgl. 113.

4. $(a + bx)\ (ax - b) + (b + cx)\ (bx - c) + (c + ax)\ (cx - a) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

L. $x = \frac{a+b+c}{\sqrt{2\,(bc+ac+ab)}}$.

5. $(a + x)\ (b - x) + (1 + ax)\ (1 - bx) = (a + b)\ (1 + x^2)$.

L. $x = \sqrt{\frac{(a-1)\ (b-1)}{(a+1)\ (b+1)}}$.

6. $(a + x)\ (b + x)\ (c - x) + (a + x)\ (b - x)\ (c + x) + (a - x)\ (b + x)\ (c + x) + (a - x)\ (b - x)\ (c + x) + (a - x)\ (b + x)\ (c - x) + (a + x)\ (b - x)\ (c - x) = 5abc$.

L. $x = \sqrt{\frac{abc}{2\,(a+b+c)}}$.

7. $(a + x)\ (b + x)\ (c + x) + (a + x)\ (b + x)\ (c - x) + (a + x)\ (b - x)\ (c + x) + (a - x)\ (b + x)\ (c + x) + (a - x)\ (b - x)\ (c + x) + (a - x)\ (b + x)\ (c - x) + (a - x)\ (b - x)\ (c - x) = 8x^2$.

L. $x = \sqrt{abc}$.

8. $(a + 5b + x)\ (5a + b + x) = 3(a + b + x)^2$.

L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

Hier, wie in 9.—11., übersieht man leicht, was für Glieder vorkommen, kann dieselben also bei der Auflösung der Klammern zusammenziehen und das Resultat hinschreiben.

9. $(a + 5b + x)\ (5a + b + 3x) = 4(a + 2b + x)^2$.

L. $x = \sqrt{(a - b)\ (a + 11b)}$.

10. $(9a - 7b + 3x)\ (9b - 7a + 3x) = (3a + 3b + x)^2$.

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

11. $(a + 17b + x)\ (17a + b + x) = 9(a + b + x)^2$.

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

12. $\frac{ab}{a^2 - b^2x^2} + \frac{cd}{c^2 - d^2x^2} = 0$. . . . . L. $x = \sqrt{\frac{ac}{bd}}$

Für die Aufgaben 12.—17. wird der gewöhnliche Weg durch Gleichnamigmachen etc. der einfachste sein.

13. $\frac{x-a}{x+1} + \frac{x+a}{x-1} = 2c$ . . . . . L. $x = \sqrt{\frac{a+c}{c-1}}$

14. $\frac{a+x}{a-x} = \frac{x+b}{x-b}$ . . . . . L. $x = \sqrt{ab}$

15. $\frac{ax+b}{a+bx} = \frac{cx+d}{c+dx}$ . . . . . L. $x = \pm 1$

16. $\frac{a-x}{1-ax} = \frac{1-bx}{b-x}$ . . . . . L. $x = \pm 1$

17. $\frac{a-x}{1-ax} = \frac{b-x}{1-bx}$ . . . . . L. $x = \pm 1$

18. $\frac{x+a+2b}{x+a-2b} = \frac{b-2a+2x}{b+2a-2x}$ . . . . . L. $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

Man betrachte die Gleichung als eine Proportion und wende den Satz von der Addition und Subtraction der Glieder an. Das giebt zunächst $\frac{x+a}{2b} = \frac{b}{2(x-a)}$.

Ist nämlich $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$

so ist auch a) $\frac{A+B}{A-B} = \frac{a+b}{a-b}$

b) $\frac{A \pm B}{B} = \frac{a \pm b}{b}$

c) $\frac{A}{A \pm B} = \frac{a}{a \pm b}$

und allgemeiner

d) $\frac{mA+nB}{pA+qB} = \frac{ma+nb}{pa+qb}$

e) $\frac{mA+nB}{B} = \frac{ma+nb}{b}$

f) $\frac{A}{pA+qB} = \frac{a}{pa+qb}$ u. s. w.

wo m, n, p und q beliebige Grössen sind. — Nach der Thesis muss $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$ sein. Setzen wir dies $= \lambda$, also $A = a\lambda$, $B = b\lambda$, so werden die Gleichungen a) — f) identisch.

Dieser Satz wird im Folgenden häufige Anwendung finden. Das durch ihn vermittelte Verfahren soll **correspondirende Addition** (corr. Add.) heissen.

Hat man rechts c statt $\frac{a}{b}$, so schreibt man $\frac{c}{1}$. Dann ist $\frac{A}{B} = c = \frac{c}{1}$, woraus man schliesst

$$\frac{A+B}{A-B} = \frac{c+1}{c-1}, \quad \frac{A \pm B}{B} = \frac{c \pm 1}{1} = c \pm 1 \text{ u. s. w.}$$

Hat man rechts $\pm \sqrt{\frac{a}{b}}$, so schreibt man $\frac{\sqrt{a}}{\pm \sqrt{b}}$. Dann hat man $\frac{A}{B} = \frac{\sqrt{a}}{\pm \sqrt{b}}$. Daraus

$$\frac{A+B}{A-B} = \frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}} \text{ u. s. w.}$$

Wegen der vielfachen Anwendung dieses Satzes bei den hier gegebenen Aufgaben mögen noch folgende Beispiele zur Erläuterung desselben hier eine Stelle finden:

1. $\frac{x+1}{x-1} = \frac{a+b}{a-b}$, also $x = \frac{a}{b}$

2. $\frac{1-x}{1+x} = a$, „ $x = \frac{1-a}{1+a}$

3. $\frac{a+x}{b+x} = \frac{m}{n}$, „ $\frac{a+b+2x}{a-b} = \frac{m+n}{m-n}$,
$x = -\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \frac{m+n}{m-n}$*)

4. $\frac{a-x}{b+x} = \frac{m}{n}$, also $\frac{a-b-2x}{a+b} = \frac{m-n}{m+n}$,
$x = \frac{a-b}{2} - \frac{a+b}{2} \cdot \frac{m-n}{m+n}$

5. $\frac{a-x}{x-b} = c$, also $\frac{a+b-2x}{a-b} = \frac{c-1}{c+1}$,
$x = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \cdot \frac{c-1}{c+1}$

6. $\frac{u+v}{u-v} = \frac{a}{b}$, also $\frac{u}{v} = \frac{a+b}{a-b}$.

Aus dem Verhältniss der Summe und Differenz zweier Grössen kann man das Verhältniss der Grössen selbst hinschreiben.

7. $\frac{u^2+v^2}{uv} = \frac{a}{b}$, also $\frac{u+v}{u-v} = \sqrt{\frac{a+2b}{a-2b}}$.

Hier hat man zunächst $\frac{u^2+v^2}{2uv} = \frac{a}{2b}$, daraus $\frac{u^2+v^2+2uv}{u^2+v^2-2uv} = \frac{a+2b}{a-2b}$. Jetzt radicirt. — Aus dem gefundenen Resultat folgt nach 6. sofort

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}.$$

Daher der Satz:

Aus dem Verhältniss der Summe der Quadrate zweier Grössen zu ihrem Producte kann man

---

*) Direct würde man finden $x = \frac{an-bm}{m-n}$. Diese Form ist häufig nicht so brauchbar, wie die oben gefundene. Aehnliche Verschiedenheiten in der Form des Resultats finden in den beiden nächsten Nummern statt.

sofort das Verhältniss der Summe dieser Grössen zu ihrer Differenz und somit das Verhältniss der Grössen selbst finden.

8. $\frac{u^2+uv+v^2}{u^2-uv+v^2}=\frac{a}{b}$, woraus $\frac{u+v}{u-v}=\sqrt{\frac{3a-b}{3b-a}}$.

Wer nach der corr. Add. in diesem und in ähnlichen Fällen das Resultat nicht sogleich hinschreiben kann, der suche zunächst immer $\frac{u^2+v^2}{uv}$ und daraus nach 7. erst $\frac{u+v}{u-v}$. — So hat man hier $\frac{u^2+v^2}{uv}=\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{u^2+v^2}{2uv}=\frac{a+b}{2a-2b}$, $\frac{u^2+v^2+2uv}{u^2+v^2-2uv}=\frac{3a-b}{3b-a}$ u. s. w. — Aehnlich verfahre man in den folgenden Aufgaben.

9. $\frac{(u+v)^2}{uv}=\frac{a}{b}$, woraus $\frac{u+v}{u-v}=\sqrt{\frac{a}{a-4b}}$

10. $\frac{(u-v)^2}{uv}=\frac{a}{b}$, „ $\frac{u+v}{u-v}=\sqrt{\frac{a+4b}{a}}$

11. $\frac{u^2+uv+v^2}{uv}=\frac{a}{b}$, „ $\frac{u+v}{u-v}=\sqrt{\frac{a+b}{a-3b}}$

12. $\frac{(u+v)^2}{u^2+v^2}=\frac{a}{b}$, „ $\frac{u+v}{u-v}=\sqrt{\frac{a}{2b-a}}$

13. $\frac{u^2-uv+v^2}{(u+v)^2}=\frac{a}{b}$, „ $\frac{u+v}{u-v}=\sqrt{\frac{3b}{4a-b}}$

14. $\frac{3u^2+2uv+3v^2}{2u^2+3uv+2v^2}=\frac{a}{b}$ „ $\frac{u+v}{u-v}=\sqrt{\frac{4b-a}{7a-8b}}$

15. $\frac{u^2+v^2}{uv}=\frac{a}{b}$, „ $\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-4b^2}}$.

Man quadrirt hier nämlich, multiplicirt im Nenner mit 4 und bildet den neuen Nenner aus der Differenz des Zählers und des Nenners. Das giebt

$$\frac{(u^2+v^2)^2}{(u^2+v^2)^2-4u^2v^2}=\frac{a^2}{a^2-4b^2}.$$

Jetzt ist nur zu radiciren, um die angegebene Formel zu erhalten. — Sind u und v zwei Quadratwurzeln, so sind die Wurzelzeichen im Quotienten $\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}$ verschwunden.

16. $\frac{u+v}{\sqrt{uv}}=\frac{a}{b}$, daraus $\frac{u+v}{u-v}=\frac{a}{\sqrt{a^2-4b^2}}$.

Man verfährt ganz wie in 15.

Auch in den nächstfolgenden Aufgaben (19.—22.) findet das Verfahren der corr. Addition zweckmässig seine Anwendung. —

In manchen Aufgaben wird durch Anwendung der corr. Addition ein Factor sichtbar, durch dessen Fortheben sich die Gleichung vereinfacht (29.—35.).

19. $\frac{a+4b+x}{a-4b+x} = \frac{3b-a+x}{3b+a-x}$. . L. $x = \sqrt{a^2+12b^2}$

Durch corr. Add. erhält man zunächst $\frac{a+x}{4b} = \frac{3b}{x-a}$

20. $\frac{x+5a+b}{x-3a+b} = \frac{x-a+b}{a-x+3b}$. L. $x = \sqrt{a^2+10ab+b^2}$

21. $\frac{a-7b+x}{7a-b-x} = \frac{a+5b+x}{5a+b+x}$. L. $x = \sqrt{a^2+34ab+b^2}$

22. $\frac{3a-b-x}{a-3b+x} = \frac{5b-3a+x}{5a-3b+x}$. L. $x = \sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$

23. $\frac{3a-2b+3x}{a-2b+x} = \frac{x-a+2b}{3x-3a+2b}$ L. $x = \sqrt{a(a+b.}$

Bei dieser und den folgenden Aufgaben (bis 28.) wird man wohl durchweg am einfachsten zur Lösung gelangen, wenn man die Nenner fortschafft und die gleichartigen Glieder zusammenzieht, also den gewöhnlichen Weg einschlägt.

24. $\frac{3a-2b+3x}{a-2b+x} = \frac{x-7a+8b}{3x-5a+4b}$. L. $x = \sqrt{a^2-b^2}$

25. $\frac{5a-6b+x}{a+x} = \frac{3a-5b+3x}{a+b+x}$. L. $x = \sqrt{(a-b)(a+3b)}$

26. $\frac{a+b-x}{3a-b-3x} = \frac{3(a-b+x)}{a-5b+x}$. L. $x = \sqrt{a^2-ab+b^2}$

27. $\frac{7a+b-x}{5a+3b-3x} = \frac{3(a-b+x)}{a-17b+x}$. L. $x = \sqrt{a^2+14ab+b^2}$

28. $\frac{5a-b+x}{2(a+2b-x)} = \frac{2(2a-b+x)}{a+11b-x}$. L. $x = \sqrt{a^2-14ab+b^2}$

29. $\frac{7a-b+x}{7b-a+x} = \frac{a(a+5b+x)}{b(5a+b+x)}$. L. $x = \sqrt{a^2+34ab+b^2}$.

Durch corr. Add. hat man hier zunächst (nach 18.*c*)

$$\frac{7a-b+x}{8(a-b)} = \frac{a(a+5b+x)}{a^2-b^2+(a-b)x},$$

$(7a-b+x)(a+b+x) = 8a(a+5b+x)$ u. s. w.

Aehnlich kann man bei den folgenden Aufgaben (30.—35.) verfahren.

30. $\frac{x+3(a-b)}{x-3(a-b)} = \frac{a(3x+9a-7b)}{b(3x-7a+9b)}$ L. $x = \sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$

31. $\frac{x+a-b}{x-a+b} = \frac{a(x+a+5b)}{b(x+5a+b)}$. L. $x = \sqrt{a^2+10ab+b^2}$

32. $\left(\frac{5a-3b+x}{5b-3a+x}\right)^2 = \frac{7a-9b+3x}{7b-9a+3x}$ L. $x = \sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$

33. $\left(\frac{a+5b+x}{5a+b+x}\right)^2 = \frac{a+17b+x}{17a+b+x}$. L. $x = \sqrt{a^2+34ab+b^2}$

34. $\left(\frac{7a-b+x}{7b-a+x}\right)^2 = \frac{17a+b-x}{a+17b-x}$. L. $x = \sqrt{a^2+34ab+b^2}$

35. $\frac{17a+b-x}{a+17b-x} = \frac{a^2(a+17b+x)}{b^2(17a+b+x)}$ L. $x = \sqrt{a^2+34ab+b^2}$

36. $\frac{(x+7a+b)\,(x-a+b)}{(5x+3a-11b)\,(x-a+17b)} = \frac{x-5a+b}{5x+7a-59b}$

L. $x = \sqrt{a^2-10ab+b^2}$.

Man entwickele und bilde nach 18. *f*

$$\frac{A}{5A-B} = \frac{a}{5a-b},$$

wo, wie oben in 18., die Grössen A, B, a, b die Zähler und Nenner der Brüche auf beiden Seiten der Gleichung bedeuten. Dann geht das x im Nenner fort und es hebt sich der Factor $32\,(a-2b)$.

37. $\frac{(1+3x+5x^2)\,(x^2+3x+5)}{(1+2x+3x^2)\,(x^2+2x+3)} = \frac{9}{4}$.

L. $x = \pm 1$.

Man kommt schliesslich auf $x^4-2x^2+1=0$. Daraus durch Radicirung $x^2-1=0$.

---

38. $\frac{\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{3-x^2}} = \frac{a}{b}$ . . . . L. $x = \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}}$

Man wende corr. Addition an und quadrire etc. — Aehnlich verfahre man bei den folgenden Aufgaben (39.—44.). Ist die Wurzel fortgeschafft, so kann man noch einmal corr. Add. anwenden.

39. $\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}} = \frac{a}{b}$. L. $x = \sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}}$

40. $\frac{\sqrt[3]{1+x^2}+\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{a}{b}$. L. $x = \sqrt{\frac{b(3a^2+b^2)}{a(a^2+3b^2)}}$

43. $\frac{\sqrt[4]{1+x^2}+\sqrt[4]{1-x^2}}{\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1-x^2}} = \frac{a}{b}$. L. $x = \sqrt{\frac{4ab\,(a^2+b^2)}{a^4+6a^2b^2+b^4}}$

42. $\frac{\sqrt[5]{x^2+1}+\sqrt[5]{x^2-1}}{\sqrt[5]{x^2-1}+\sqrt[5]{x^2-1}} = \frac{a}{b}$. L. $x = \sqrt{\frac{a(a^4+10a^2b^2+5b^4)}{b(5a^4+10a^2b^2+b^4)}}$

43. $\dfrac{\sqrt[6]{x^2+1}+\sqrt[6]{x^2-1}}{\sqrt[6]{x^2+1}-\sqrt[6]{x^2-1}}=\dfrac{a}{b}$. L. $x=\sqrt{\dfrac{(a^2+b^2)(a^4+14a^2b^2+b^4)}{2ab(3a^2+b^2)(a^2+3b^2)}}$

44. $\dfrac{\sqrt[n]{x^2+1}+\sqrt[n]{x^2-1}}{\sqrt[n]{x^2+1}-\sqrt[n]{x^2-1}}=\dfrac{a}{b}$. L. $x=\sqrt{\dfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{(a+b)^n-(a-b)^n}}$

Sind statt a und b gebrochene oder grössere ganze Zahlen gegeben, so wird die Rechnung am einfachsten sein, wenn man $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^n=c$ setzt, erst c berechnet und daraus $\sqrt{\dfrac{c+1}{c-1}}$. Das Auflösen der Potenz würde in solchem Falle die Rechnung nur umständlicher machen.

45. $a\sqrt{m+x}-b\sqrt{m-x}=\sqrt{m(a^2+b^2)}$

L. $x=\pm\dfrac{2abm}{a^2+b^2}$

Bei dieser und den folgenden Aufgaben sind die Wurzeln durch Quadriren fortzuschaffen. Welche Wurzelgrösse man zunächst am zweckmässigsten isolirt, hängt von den Radicanden ab. Es muss sich nach dem Quadriren möglichst viel fortheben und nur noch eine möglichst einfache Wurzelgrösse übrig bleiben.

46. $\sqrt{4a+b-4x}-2\sqrt{a+b-2x}=\sqrt{b}$

L. $x=\sqrt{ab}$

47. $\sqrt{3a-2b+2x}-\sqrt{3a-2b-2x}=2\sqrt{a}$

L. $x=\sqrt{2a(a-b)}$

48. $\sqrt{2a-b+2x}-\sqrt{10a-9b-6x}=4\sqrt{a-b}$

L. $x=\sqrt{a(a-b)}$

49. $\sqrt{3a-4b+5x}+\sqrt{x-a}=2\sqrt{x+a}$

L. $x=\sqrt{a^2+b^2}$

50. $\sqrt{3a-4b+5x}-\sqrt{x-a}=2\sqrt{2(x-b)}$

L. $x=\sqrt{a^2+b^2}$

51. $\sqrt{5x-3a+4b}+\sqrt{5x-3a-4b}=2\sqrt{x+a}$

L. $x=\sqrt{a^2+b^2}$

52. $\sqrt{2a+b+2x}+\sqrt{10a+9b-6x}=2\sqrt{2a+b-2x}$

L. $x=\sqrt{a(a+b)}$

53. $2\sqrt{2a+b+2x}+\sqrt{10a+b-6x}=\sqrt{10a+9b-6x}$

L. $x=\sqrt{a(a+b)}$

54. $\sqrt{2a-13b+14x}+\sqrt{3(b-2a+2x)}=2\sqrt{2a-b+2x}$

L. $x=\sqrt{a^2-ab+b^2}$

55. $\sqrt{3(7a+b+x)}-\sqrt{a+7b-x}=2\sqrt{7a+b-x}$

L. $x=\sqrt{a^2+14ab+b^2}$

56. $\sqrt{(a+x)(b+x)}+\sqrt{(a-x)(b-x)}=\sqrt{(a+x)(b-x)}+\sqrt{(a-x)(b+x)}$

L. $x=0$

Die Gleichung lässt sich, indem man das 2. und das 3. Glied umstellt, auch so schreiben:

$$\sqrt{a+x}(\sqrt{b+x}-\sqrt{b-x})=\sqrt{a-x}(\sqrt{b+x}-\sqrt{b-x})$$

Um diese Gleichung zu erfüllen, kann man setzen

1. $\sqrt{a+x}=\sqrt{a-x}$
2. $\sqrt{b+x}-\sqrt{b-x}=0$

Das nennt man **eine Gleichung zerlegen** (vgl. 92.). Beide Partialgleichungen (1. und 2.) liefern hier dieselbe Lösung, $x=0$.

57. $x+\sqrt{(x-a)(x-b)}=\sqrt{x(x-a)}+\sqrt{x(x-b)}$

L. $x=\infty$ (vgl. 113.).

Auflösung wie in Nr. 56. Die Partialgleichungen werden hier

1. $\sqrt{x}-\sqrt{x-a}=0$ 2. $\sqrt{x}-\sqrt{x-b}=0$

Beide liefern denselben Werth für x.

58. $\sqrt{(a+x)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}=2\sqrt{ax}$

L. $x=\sqrt{ab}$

Man kommt nach Fortschaffung der Wurzeln schliesslich auf $x^4-2abx^2+a^2b^2=0$. Daraus folgt durch Radicirung $x^2-ab=0$.

59. $\sqrt{(a+x)(x+b)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}=2\sqrt{bx}$

L. $x=\sqrt{ab}$

60. $\sqrt{x(a-x)}-\sqrt{x(a+x)}=\sqrt{a(2x-a)}$

L. $x=\frac{1}{2}a\sqrt{2}$

61. $\sqrt{x(a-x)}+\sqrt{x(a+x)}=\sqrt{a(2x+a)}$

L. $x=\frac{1}{2}a\sqrt{2}$

62. $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{2x}{9}$

L. $x=\pm 3$

63. $\sqrt{1-x^2} = 2ab - \dfrac{a\sqrt{1-a^2} + b\sqrt{1-b^2}}{a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}}$

L. $x = a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$

Die Wurzeln aus dem Nenner im 3. Gliede fortgeschafft, erhält man rechts $ab - \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$. Dann lässt sich schliesslich aus $1 - \left(ab - \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right)^2 = a^2(1-b^2) + b^2(1-a^2) + 2ab\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$ die Wurzel ziehen. — Man kann auch trigonometrisch lösen und setzen

$$a = \sin\alpha \qquad b = \sin\beta \qquad x = \sin\xi$$

Das giebt nach einigen Reductionen

$$\cos\xi = \sin\alpha\cdot\sin\beta - \cos\alpha\cdot\cos\beta$$
$$= -\cos(\alpha+\beta) = \cos[\pi \mp (\alpha+\beta)]$$

Also $\xi = \pi \mp (\alpha+\beta)$, mithin

$$\sin\xi = \pm\sin(\alpha+\beta) = \pm(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta) \text{ etc.}$$

64. $\dfrac{x+\sqrt{ax}}{a-\sqrt{ax}} + \dfrac{a+\sqrt{ax}}{x-\sqrt{ax}} = \dfrac{x-a}{a}$

L. $x = \pm a$

Man mache gleichnamig. Der gemeinschaftliche Nenner ist $a(\sqrt{a}-\sqrt{x})\sqrt{x} = (a-\sqrt{ax})\sqrt{ax} = -a(x-\sqrt{ax})$

65. $\dfrac{\sqrt{(a+x)(x+b)} + \sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)} - \sqrt{(a-x)(x-b)}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

L. $x = \sqrt{ab}$

Man quadrire, wende corr. Addition an (18. a), hebe durch $a+b$ und quadrire noch einmal etc.

66. $\sqrt{\dfrac{3a-2b+2x}{3a-2b-2x}} = \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{2(a-b)})^2}{2b-a}$

L. $x = \sqrt{2a(a-b)}$

Man transformire die rechte Seite der Gl. in

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{2(a-b)}}{\sqrt{a}-\sqrt{2(a-b)}},$$

quadrire dann, wende corr. Add. an u. s. w.

---

67. $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}$

L. $x = \pm a$

Man erhebt zur 3. Potenz nach der Formel

$$(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v).$$

Das giebt

$$(a + x) + (a - x) + 3\sqrt[3]{a^2 - x^2} \cdot \sqrt[3]{2a} = 2a,$$

$$\text{d. h. } \sqrt[3]{a^2 - x^2} = 0 \text{ etc.}$$

68. $\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x} = 2\sqrt[3]{a}$

L. $x = 0$

69. $\sqrt[3]{(a + x)^2} - \sqrt[3]{a^2 - x^2} + \sqrt[3]{(a - x)^2} = \sqrt[3]{a^2}$

L. $x = 0$

Diese Gleichung ist von der vorhergehenden nicht verschieden. Je nachdem man 68. oder 69. in die identische Gleichung

$$\sqrt[3]{(a + x)^3} + \sqrt[3]{(a - x)^3} = 2a$$

dividirt, erhält man nach dem Satze

$$u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$$

69. oder 68. Die Gleichung 68. ist leichter zu lösen, man wird daher 69. auf 68. reduciren. — Man kann 69. auch mit $\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x}$ multipliciren, so erhält man ebenfalls 68.

70. $$\frac{\sqrt[3]{(a+x)^2} + \sqrt[3]{a^2 - x^2} + \sqrt[3]{(a-x)^2}}{\sqrt[3]{(a+x)^2} - \sqrt[3]{a^2 - x^2} + \sqrt[3]{(a-x)^2}} = c$$

L. $x = ac\sqrt{\frac{3 - c}{3c - 1}}$

a. Dividirt man die gegebene Gleichung in die identische Gleichung

$$\frac{\sqrt[3]{(a+x)^3} - \sqrt[3]{(a-x)^3}}{\sqrt[3]{(a+x)^3} + \sqrt[3]{(a-x)^3}} = \frac{x}{a},$$

so erhält man nach der Formel $u^3 \pm v^3 = (u \pm v)(u^2 \mp uv + v^2)$ sofort

$$(\alpha) \qquad \frac{\sqrt[3]{a + x} - \sqrt[3]{a - x}}{\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x}} = \frac{x}{ac}$$

Wendet man jetzt corr. Add. an, kubirt und wendet abermals corr. Add. an, so ist x gefunden.

b. Ein oft zweckmässigerer Weg bei Gleichungen ähnlicher Art ist der, dass man durch corr. Add. aus der gegebenen Gleichung direct zunächst den Ausdruck links in (α) sucht. Nach 18. 8 erhält man

$$(\beta) \qquad \frac{\sqrt[3]{a + x} - \sqrt[3]{a - x}}{\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x}} = \sqrt{\frac{3 - c}{3c - 1}}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit der gegebenen, so erhält man sofort

$$(\gamma) \qquad \frac{x}{a} = c \sqrt{\frac{3-c}{3c-1}}$$

c. Auch aus der Gleichung (β) kann man x direct leicht entwickeln. Man behandelt die Gleichung, wie es in a. in Bezug auf die Gleichung (α) angedeutet ist. Das liefert sofort (γ).

d. Dass man auch auf dem gewöhnlichsten Wege aus der gegebenen Gleichung leicht x findet, übersieht man wohl. Man hat

$$(c-1)\left[\sqrt[3]{(a+x)^2} + \sqrt[3]{(a-x)^2}\right] = (c+1)\sqrt[3]{a^2-x^2}$$

Diese Gleichung ist nach 67. von ihren Wurzeln zu befreien.

71. $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = c$

L. $x = \frac{c+1}{c-1}\sqrt{\frac{c-2}{c+2}}$

Kubirt man direct nach 67., so fallen zwar die Wurzeln sogleich fort, aber man erhält

$$x = \sqrt{\frac{c^3-3c-2}{c^3-3c+2}},$$

wobei man nicht so schnell übersieht, dass der Radicand sich noch vereinfachen lässt. Man hat nämlich:

$$c^3-3c-2 = (c+1)^2(c-2)$$
$$c^3-3c+2 = (c-1)^2(c+2).$$

Die Auflösung nach 70. b liefert direct den einfachsten Radicanden. Man hat mit Hülfe der corr. Add.

$$(\alpha)\ \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{1-x^2}} = c, \text{ also } \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{(1+x)^2}-\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}} = \frac{c+1}{c-1}$$

$$(\beta)\ \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{2\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{c}{2}, \text{ also } \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}} = \sqrt{\frac{c-2}{c+2}}$$

Die Multiplication der beiden zuletzt gefundenen Gleichungen liefert x.

72. $\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\left(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}\right)^2} = c$

L. $x = \frac{1+c}{3c-1}\sqrt{2c-1}$

Hier ist ebenfalls der in 71. angegebene Weg einzuschlagen. Man muss zunächst mit Hülfe der corr. Add. auf die Gleichungen (α) und (β) zu kommen suchen (vgl. 18, 12).

73. $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{c}$

L. $x=\frac{1}{3}(a+c)\sqrt{\frac{8a-c}{3c}}$

Man dividire den Kubus der gegebenen Gleichung durch die identische Gleichung

$$\sqrt{(a+x)^3}+\sqrt[3]{(a-x)^3}=2a.$$

Das giebt mit Fortlassung des gemeinsamen Factors $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}\right)^2}{\sqrt[3]{(a+x)^2}-\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt{(a-x)^2}}=\frac{c}{2a};$$

hieraus folgen, wie in 71. mit Hülfe der corr. Addition die Gleichungen

$$\frac{\sqrt[3]{(a+x)^2}+\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}}{\sqrt[3]{(a+x)^2}-\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}}=\frac{a+c}{3a}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x}}{\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}}=\sqrt{\frac{8a-c}{3c}}$$

Die Multiplication dieser beiden Gleichungen liefert $\frac{x}{a}$.

Schafft man die Wurzeln durch Kubiren fort und sucht x in der gewöhnlichsten Weise, so erhält man, wie in den beiden vorhergehenden Aufgaben, nicht unmittelbar den einfachsten Radicanden. — Dasselbe gilt von den folgenden Aufgaben bis 80. Man hat den hier bei dieser Aufgabe oder in 70. *b* oder bei 71. angegebenen Weg einzuschlagen.

74. $\sqrt[3]{(a+x)^2}-\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}=\sqrt[3]{c^2}$

L. $x=\frac{8a^2+c^2}{3c^2}\sqrt{\frac{c^2-a^2}{3}}$

75. $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\frac{c}{\sqrt[3]{a^2-x^2}}$

L. $x=(a+c)\sqrt{\frac{2a-c}{2a+3c}}$

76. $\left(\sqrt[3]{(a+x)^2}-\sqrt[3]{(a-x)^2}\right)\left(\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x}\right)=c$

L. $x=(3a-c)\sqrt{\frac{c}{8a-3c}}$

77. $\left(\sqrt{(a+x)^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}\right)\left(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}\right)=c$

L. $x=(a-c)\sqrt{\frac{4a-c}{3c-4a}}$

78. $$\frac{(a+x)\sqrt[3]{a-x}-(a-x)\sqrt[3]{a+x}}{\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x}}=c$$

L. $x=(a+c)\sqrt{\frac{2a-c}{2a+3c}}$

Hebt man links durch den Nenner, so erhält man die Gleichung 75.

79. $$\frac{(a+x)\sqrt[3]{a+x}-(a-x)\sqrt[3]{a-x}}{\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x}}=c$$

L. $x=(a-c)\sqrt{\frac{4a-c}{3c-4a}}$

Auch hier ist wieder der Zähler durch den Nenner theilbar.

80. $$\frac{\left(\sqrt[3]{(a+x)^2}-\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}\right)^2}{\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}}=c$$

L. $x=\frac{4a+c}{3c}\sqrt{a(2c-\frac{1}{3}a)}$

Man dividire die gegebene Gleichung in das Quadrat der in 73. benutzten identischen Gleichung $\sqrt[3]{(a+x)^3}+\sqrt[3]{(a-x)^3}=2a$, so erhält man

$$\left(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}\right)^3=\frac{4a^2}{c}$$

Man zieht die Kubikwurzel und löst weiter wie in 73.

81. $$\frac{\left(\sqrt[4]{a+x}+\sqrt[4]{a-x}\right)^2}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}=c$$

L. $x=\frac{2a\sqrt{2c-c^2}}{1+2c-c^2}$

Mit Hülfe der corr. Add. kommt man leicht zum Ziele, indem man zunächst

$$\frac{\sqrt[4]{a+x}+\sqrt[4]{a-x}}{\sqrt[4]{a+x}-\sqrt[4]{a-x}}=\sqrt{\frac{c}{2-c}}$$

sucht. Daraus folgt durch corr. Add., Erheben zur 4. Potenz und nochmalige Anwendung der corr. Add.

$$\frac{x}{a}=\frac{8\sqrt{2c-c^2}}{4+8c-4c^2}$$ u. s. w.

Auch auf dem gewöhnlichsten Wege durch Fortschaffen der Wurzeln gelangt man zur Lösung. Man bestimmt zunächst $\sqrt{a^2-x^2}$

82. $\left(\sqrt[4]{x+a}+\sqrt[4]{x-a}\right)^3\left(\sqrt[4]{x+a}-\sqrt[4]{x-a}\right)=2c$

L. $x=\frac{a^2+2ac-c^2}{2\sqrt{2ac-c^2}}$

Man schaffe alle Wurzeln fort. Oder man dividire die gegebene Gleichung durch die identische $\sqrt[4]{(x+a)^4} - \sqrt[4]{(x-a)^4} = 2a$. Das giebt

$$\frac{(\sqrt[4]{x+a} + \sqrt[4]{x-a})^2}{\sqrt[4]{(x+a)^2} + \sqrt[4]{(x-a)^2}} = \frac{c}{a}.$$

Durch corr. Add. kommt man jetzt leicht zum Ziele, wie in 81. angegeben.

83. $$\frac{\sqrt[4]{x+a} + \sqrt[4]{x-a}}{\sqrt[4]{x+a} - \sqrt[4]{x-a}} = \frac{(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a})^2}{2c}$$

L. $$x = \frac{c^2 + 2ac - a^2}{2c} \sqrt{\frac{a}{2c-a}}$$

Man multiplicire die gegebene Gleichung mit der in 82. angegebenen identischen Gleichung. Das giebt

$$\frac{(\sqrt[4]{x+a} + \sqrt[4]{x-a})^2}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}} = \frac{a}{c}$$

Dann weiter, wie in 81. oder 82.

B.

Vollständige quadratische Gleichungen einfachster Art.

84. $a^2 + b^2 + x^2 = 1 - 2abx$

L. $x = -ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$

Diese Gleichung hat eine trigonometrische Bedeutung. Sind die Winkel eines Dreiecks α, β, γ, so muss, wenn man

$$a = \cos\alpha \quad b = \cos\beta$$

setzt, $x = \cos\gamma$ sein. Dies folgt auch schon aus der bekannten Relation

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = 1$$

85. $a^2 + b^2 + x^2 = 2ab + 2ax + 2bx$

L. $x = a + b + 2\sqrt{ab}$

86. $(a-x)^2 + (x-b)^2 = (a-b)^2$

L. $x_1 = a$, $x_2 = b$

Ist eine Wurzel einer quadratischen Gleichung rational, so muss es auch die andere sein. Kann man daher eine Wurzel erkennen, so wird sich die andere meistens von selbst ergeben. Damit ist dann auch die Auflösung der Gleichung beschafft (s. 92).

87. $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$

L. $x_1 = a,\ x_2 = b$

88. $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$

L. $x_1 = a + b,\ x_2 = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$

Ohne die quadratische Gleichung aufzulösen, gelangt man hier durch Radiciren leicht zum Ziele.

89. $a^2(b - x)^2 = b^2(a - x)^2$

L. $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2ab}{a + b}$

90. $\frac{(a - x)^2 + (x - b)^2}{(a + b - 2x)^2} = \frac{a^2 + b^2}{(a + b)^2}$

L. $x_1 = 0,\ x_2 = a + b$

Man übersieht hier leicht, dass $x = 0$ der Gleichung genügt. In diesem Falle kann die Gleichung kein Glied ohne x enthalten. Man hat daher bei der Entwickelung nur auf die Glieder mit x^2 und x zu achten, die bekannte Grösse muss von selbst verschwinden.

91. $\frac{(a - x)^2 + (x - b)^2}{(a - x)^2 - (x - b)^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

L. $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2ab}{a + b}$

92. $(a - x)(x - b) = (a - x)(c - x)$

L. $x_1 = a,\ x_2 = \frac{1}{2}(b + c)$

a) Der Gleichung wird genügt durch $a - x = 0$ und durch $x - b = c - x$. Man kann also an die Stelle der gegebenen Gleichung die beiden setzen:

1) $a - x = 0.$ 2) $x - b = c - x$

Die Lösungen dieser Gleichungen müssen zugleich die der gegebenen Gleichung sein. Diese ist damit zerlegt in die Gleichungen 1) und 2).

b) Ist die Gleichung auf 0 gebracht und sind die Factoren des linken Theils bekannt, so ist damit auch die Zerlegung der Gleichung gegeben. So zerlegt man

$$(a - x)(b - x) = 0$$

in 1) $a - x = 0$, 2) $b - x = 0$;

denn nur auf diese Weise kann der Gleichung genügt werden. Es sind also die aus den Gleichungen 1) und 2) sich ergebenden Werthe für x die Wurzeln der gegebenen Gleichung, $x_1 = a$ und $x_2 = b$.

c) Hat der linke Theil der auf 0 gebrachten Gleichung mehr als 2 Factoren, so liefert jeder Factor, der x enthält, $= 0$ gesetzt, eine Wurzel der Gleichung. Die Gleichung

$$x(ax - c)(mx + n)(x - p) = 0$$

zerfällt z. B. in die 4 anderen

1) $x = 0$, 2) $ax - c = 0$, 3) $mx + n = 0$, 4) $x - p = 0$,

muss demnach die 4 Wurzeln haben:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{c}{a} \qquad x_3 = -\frac{n}{m} \qquad x_4 = p$$

d) Hat eine Gleichung, gleich viel ob sie auf 0 gebraucht ist oder nicht, einen Factor x, so muss sie auch eine Wurzel 0 haben. So liefert die Gleichung

$$ax^2 + bx = 0$$

die Wurzeln

$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = -\frac{b}{a};$$

denn sie lässt sich zerlegen in

1) $x = 0$ 2) $ax + b = 0$.

Die Gleichung

$$ax^2 - bx = cx^2 - dx$$

würde sich zerlegen lassen in

1) $x = 0$ 2) $ax - b = cx - d$,

und folglich die Wurzeln liefern

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{b - d}{a - c}$$

Die Lösungen der folgenden Aufgaben (93.—104.) werden nach diesen Erörterungen leicht hinzuschreiben sein.

93. $x^2 - ax = 0$ . . . . . L. $x_1 = 0$, $x_2 = a$

94. $x^2 = (a + b)x$ . . . . . L. $x_1 = 0$, $x_2 = a + b$

95. $x^2 + (a - x)^2 = a^2$ . . . . L. $x_1 = 0$, $x_2 = a$

96. $x^2 + (a - x)^2 = (a - 2x)^2$ . . L. $x_1 = 0$, $x_2 = a$

97. $(a - x)^2 + (x - b)^2 = a^2 + b^2$. L. $x_1 = 0$, $x_2 = a + b$

98. $(a - x)(x - b) + ab = 0$ . . L. $x_1 = 0,\ x_2 = a + b$

99. $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = a^2 - ab + b^2$
L. $x_1 = 0,\ x_2 = a + b$

100. $(x - 1)^2 = a(x^2 - 1)$ . . L. $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1+a}{1-a}$

101. $\frac{a-x}{x-b} = \frac{x-a}{c+x}$ . . . . . L. $x_1 = a,\ x_2 = \frac{b-c}{2}$

102. $\frac{a+b-x}{a-c-x} = \frac{a-c+x}{a-c-x}$ . . L. $x_1 = a - c,\ x_2 = \frac{b+c}{2}$

103. $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$
L. $x_1 = a - b,\ x_2 = \frac{b-c}{2}$

104. $(x - a)^2 - b^2 + (a + b - x)(b + c - x) = 0$
L. $x_1 = a + b,\ x_2 = \frac{a+c}{2}$

105. $(a + b + c)x^2 - (2a + b + c)x + a = 0$
L. $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{a}{a+b+c}$

Hier übersieht man leicht, dass $x = 1$ der Gleichung genügt. Kennt man aber eine Wurzel einer quadratischen Gleichung, so ist die andere leicht zu finden. Zunächst muss diese, wenn jene rational ist, ebenfalls rational sein. Man bringt die Gleichung auf 0 und ordnet sie. Das möge geben

$$Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Genügt nun $x = a$ der Gleichung, so muss $x - a$ bekanntlich ein Factor der linken Seite sein. Der andere Factor muss $Ax - \frac{C}{a}$ sein. Man hat die Glieder dieses Factors nur so zu wählen, dass bei der Multiplication der beiden Factoren $x - a$ und $Ax - \frac{C}{a}$ das 1. und 3. Glied stimmen, das mittlere Glied Bx muss von selbst herauskommen. Dann liefert

$$Ax - \frac{C}{a} = 0$$

die andere Wurzel.

Bei der oben gegebenen Gleichung ist $x - 1$ ein Factor links. Der andere Factor muss folglich sein $(a + b + c)x - a$. Dieser liefert, $= 0$ gesetzt, die 2. Wurzel.

Diese Art der Auflösung kann auch bei den folgenden 5 Aufgaben angewendet werden, erleichtert besonders bei 109. und 110. das Auffinden der Wurzeln.

106. $\frac{a+b-x}{c} = \frac{a+b-c}{x}$

L. $x_1 = c,\ x_2 = a + b - c$

107. $(a - x)^2 + (a - b)^2 = (a + b - 2x)^2$

L. $x_1 = a,\ x_2 = \frac{4b - a}{3}$

108. $x(a + b - x) + (a + b + c)c = 0$

L. $x_1 = a + b + c,\ x_2 = -c$

109. $(n - p)\,x^2 + (p - m)\,x + m - n = 0$

L. $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{m - n}{n - p}$

110. $\frac{ax^2 - bx + c}{\alpha x^2 - \beta x + \gamma} = \frac{a - b + c}{\alpha - \beta + \gamma}$

L. $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{(a - b)\,\gamma - (\alpha - \beta)\,c}{(\beta - \gamma)\,a - (b - c)\,\alpha}$

111. $\frac{ax^2 - bx + c}{\alpha x^2 - \beta x + \gamma} = \frac{c}{\gamma}$

L. $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{b\gamma - c\beta}{a\gamma - c\alpha}$

112. $\frac{ax^2 - bx + c}{\alpha x^2 - \beta x + \gamma} = \frac{b}{\beta}$ *)

L. $x = \sqrt{\frac{b\gamma - c\beta}{a\beta - b\alpha}}$

113. $\frac{ax^2 - bx + c}{\alpha x^2 - \beta x + \gamma} = \frac{a}{\alpha}$

L. $x_1 = \frac{a\gamma - c\alpha}{a\beta - b\alpha},\ x_2 = \infty$

Verschwindet in einer Gleichung die höchste Potenz von x, so hat sie eine Wurzel ∞, wenn man diese Wurzel überhaupt in Rechnung bringen will. Ist z. B. die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + b_1x + c_1$$

gegeben, so wird dieselbe allerdings erfüllt durch

$$bx + c = b_1x + c_1,$$

wie man gewöhnlich ohne Weiteres setzt. Dividirt man aber durch x^2, so giebt das

$$a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = a + \frac{b_1}{x} + \frac{c_1}{x^2}$$

---

*) Diese Gleichung ist eine reine quadratische und nur des Vergleichs halber hierher gestellt.

Dieser Gleichung wird um so mehr genügt, je grösser man x nimmt. Setzt man also $x = \infty$, so werden die übrigen Glieder verschwinden und es bleibt nur $a = a$, eine richtige Gleichung. Also genügt $x = \infty$.

114. $x^2 - (a + b)\,x + (a + c)\,b = (a + c)\,c$

L. $x_1 = a + c$, $x_2 = b - c$

Bei dieser und den folgenden Gleichungen bis 122. führt der einfache und allgemeine Weg für die Auflösung einer quadratischen Gleichung am sichersten zum Ziele. Man kann aber auch die Factoren aufsuchen und dann die Gleichung zerlegen. Bei der Aufsuchung der Factoren ist, nachdem die Gleichung auf 0 gebracht und geordnet, besonders auf das 1. und 3. Glied zu achten (vgl. 105.). — Die vorstehende liefert

$$x^2 - (a + b)\,x + (a + c)\,(b - c) = 0$$

$$[x - (a + c)]\,[x - (b - c)] = 0$$

1. $x - (a + c) = 0$ 2. $x - (b - c) = 0$ u. s. w.

115. $(a - x)(b + x) + 2(a + b)x = (a + x)(b - x) + 4x^2 + a^2 - b^2$

L. $x_1 = \frac{a + b}{2}$, $x_2 = \frac{a - b}{2}$

Man erhält nach einigen leichten Reductionen $4x^2 - 4ax + a^2 - b^2 = 0$, d. h.

$$\big(2x - (a + b)\big)\,\big(2x - (a - b)\big) = 0 \text{ etc.}$$

116. $(2a - b - x)^2 + 9(a - b)^2 = (a + b - 2x)^2$

L. $x_1 = 2a - b$, $x_2 = 3b - 2a$

117. $(a + b + x)(b + c + x) = (3a - b - x)\,(3a - 2b + c - 2x)$

L. $x_1 = a - b$, $x_2 = 9a - b + 2c$

118. $(2a + 2c - x)^2 = (2b + x)\,(3a - b + 3c - 2x)$

L. $x_1 = a - b + c$, $x_2 = \frac{2}{3}\,(2a - b + 2c)$

119. $(3a - 5b + x)\,(5a - 3b - x) = (7a - b - 3x)^2$

L. $x_1 = a + b$, $x_2 = \frac{17a - 7b}{5}$

120. $(3a - b + x)\,(2a + b - x) = (5a + 3b - 3x)^2$

L. $x_1 = a + b$, $x_2 = \frac{1}{10}\,(19a + 10b)$

121. $a\,(a - b) - b\,(a - c)\,x + c\,(b - c)\,x^2 = 0$

L. $x_1 = \frac{a}{c}$, $x_2 = \frac{a - b}{b - c}$

122. $(ab + ac + bc)(x^2 + x + 1) + (a - b)^2 =$
$(2ac + b^2)(x^2 + x + 1) + (a - c)^2 x$

L. $x_1 = \frac{a-c}{a-b}$, $x_2 = \frac{a-b}{b-c}$

---

123. $x + \sqrt{a^2 - x^2} = a$ . . L. $x_1 = 0$, $x_2 = a$

Bei dieser und den folgenden Aufgaben hat man die Wurzeln fortzuschaffen. Dann ist wenigstens bis 132. nach dem bei 92. und 113. Gesagten die Auflösung schon beschafft.

124. $x + \sqrt{x^2 - a^2} = a$ . . . . L. $x_1 = a$, $x_2 = \infty$

125. $x + \sqrt{x^2 + a^2} = a$ . . . . L. $x_1 = 0$, $x_2 = \infty$

126. $\sqrt{a - x} + \sqrt{x - b} = \sqrt{a - b}$. L. $x_1 = a$, $x_2 = b$

127. $\sqrt{a^2 - x} + \sqrt{b^2 + x} = a + b$

L. $x_1 = 0$, $x_2 = a^2 - b^2$

128. $\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x} = \sqrt{a + b}$

L. $x_1 = \frac{ab}{a+b}$, $x_2 = \infty$

129. $\sqrt{a - x} + \sqrt{x - b} = \sqrt{a + b - 2x}$

L. $x_1 = b$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$

130. $\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x} = \sqrt{a + b - 2x}$

L. $x_1 = a$, $x_2 = b$

131. $\frac{\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x} - \sqrt{x-b}} = \frac{x}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}$

L. $x_1 = \frac{a^2 b + ab^2}{a^2 + b^2}$, $x_2 = \infty$

132. $\frac{(a+x)\sqrt{a-x} - (b+x)\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x} - \sqrt{b-x}} = x$

L. $x_1 = \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}$, $x_2 = \infty$

133. $\frac{\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x} - \sqrt{x-b}} = \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$

L. $x = \frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{4}\sqrt{2}$

134. $\frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a} - \sqrt{x-b}} = \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}$

L. $x = \frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2}\sqrt{2}$

135. $\sqrt{\frac{a-x}{b+x}} + \sqrt{\frac{b+x}{a-x}} = c$

L. $x = \frac{a-b}{2} \pm \frac{a+b}{2c}\sqrt{c^2-4}$

Man quadrire, subtrahire 4 auf beiden Seiten und ziehe wieder die Quadratwurzel, so erhält man

$$\sqrt{\frac{a-x}{b+x}} - \sqrt{\frac{b+x}{a-x}} = \sqrt{c^2-4}$$

Dividirt man diese Gleichung durch die gegebene, so giebt das

$$\frac{(a-x)-(b+x)}{(a-x)+(b+x)} = \frac{\sqrt{c^2-4}}{c} \text{ u. s. w.}$$

In ähnlicher Weise kann man die 3 folgenden Gleichungen lösen.

136. $\sqrt{\frac{a-x}{b+x}} - \sqrt{\frac{b+x}{a-x}} = c$

L. $x = \frac{a-b}{2} \pm \frac{(a+b)\,c}{2\sqrt{c^2+4}}$

137. $\sqrt{\frac{a-x}{b-x}} + \sqrt{\frac{b-x}{a-x}} = c$

L. $x = \frac{a+b}{2} \pm \frac{(a-b)\,c}{2\sqrt{c^2-4}}$

138. $\sqrt{\frac{a-x}{b-x}} - \sqrt{\frac{b-x}{a-x}} = c$

L. $x = \frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2c}\sqrt{c^2+4}$

139. $\frac{(a-x)\sqrt{a-x} + (x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}} = a-b$

L. $x_1 = a,\ x_2 = b$

Man mache gleichnamig, so erhält man leicht

$$(b-x)\sqrt{a-x} = (a-x)\sqrt{x-b}$$

Daraus durch Zerlegung

1. $\sqrt{a-x} = 0$ 2. $\sqrt{x-b} = 0$ 3. $\sqrt{b-x} = -\sqrt{a-x}$

Die 3. Gleichung muss gestrichen werden, weil sie nur durch die Multiplication des Nenners nach rechts gekommen ist. Man hätte den Nenner links heben können. Nach der Formel

$$\frac{u^3+v^3}{u+v} = u^2 - uv + v^2$$

hat man

$$\sqrt{(a-x)^2} - \sqrt{(a-x)(x-b)} + \sqrt{(x-b)^2} = a - b$$

d. h. $\sqrt{(a-x)(x-b)} = 0$ u. s. w.

140. $\dfrac{(a-x)^2\sqrt{a-x} + (x-b)^2\sqrt{x-b}}{(a-x)\sqrt{a-x} + (x-b)\sqrt{x-b}} = a - b$

L. $x_1 = a,\ x_2 = b$

Die Auflösung geschieht ganz wie in voriger Aufgabe. Man erhält schliesslich

$$(a-x)(x-b)\left(\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}\right) = 0 \text{ u. s. w.}$$

141. $\dfrac{(a-x)\sqrt{b+x} + (b+x)\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-x} + \sqrt{b+x}} = \sqrt{ab}$

L. $x_1 = 0,\ x_2 = a - b$

Man kann links durch den Nenner heben.

142. $\dfrac{(x-a)\sqrt{x-a} + (x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}} = a - b$

L. $x_1 = a,\ x_2 = \dfrac{4a-b}{3}$

Hebt man links durch den Nenner, so kommt man leicht auf

$$2(x-a) = \sqrt{(x-a)(x-b)}.$$

Dann durch Zerlegung weiter.

143. $\dfrac{(a-x)\sqrt{a-x} + (b-x)\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x}} = c$

L. $x = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{2}{3}c \pm \dfrac{1}{6}\sqrt{4c^2 - 3(a-b)^2}$

Man hebe links durch den Nenner, schaffe die Wurzeln fort und löse in gewöhnlicher Weise.

144. $\dfrac{(a-x)\sqrt{a-x} + (b+x)\sqrt{b+x}}{(a-x)\sqrt{b+x} + (b+x)\sqrt{a-x}} = c$

L. $x = \dfrac{a-b}{2} \pm \dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{(c+3)(c-1)}}{c+1}$

145. $\dfrac{(a-x)\sqrt{a-x} + (x-b)\sqrt{x-b}}{(\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b})^3} = c$

L. $x = \dfrac{a+b}{2} \pm \dfrac{a-b}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{12c-3}}{2c+1}$

146. $\dfrac{(a-x)\sqrt[3]{x-b} + (x-b)\sqrt[3]{a-x}}{\sqrt[3]{a-x} - \sqrt[3]{x-b}} = x$

L. $x_1 = \dfrac{a^3b + ab^3}{a^3 + b^3},\ x_2 = \infty$

147. $\dfrac{(a+x)\sqrt[3]{a-x}-(b+x)\sqrt[3]{b-x}}{\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{b-x}}=x$

L. $x_1=\dfrac{a^4-b^4}{a^3-b^3}$, $x_2=\infty$

148. $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}-\dfrac{(x+a)^2}{a(x-a)}$

L. $x_1=0$, $x_2=a$

149. $\dfrac{1}{\sqrt{a+x}+\sqrt{b-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{a+x}-\sqrt{b-x}}=\dfrac{2\sqrt{b}}{a-b}$

L. $x_1=\dfrac{(a-b)^2}{4b}$, $x_2=b-a$

150. $\sqrt{a-bx}+\sqrt{c-dx}=\sqrt{a+c-(b+d)x}$

L. $x_1=\dfrac{a}{b}$, $x_2=\dfrac{c}{d}$

151. $\sqrt{ax-b}+\sqrt{c-dx}=\sqrt{(a+d)x-(b+c)}$

L. $x_1=\dfrac{b+c}{a+d}$, $x_2=\dfrac{c}{d}$

Man bringe das 2. Glied nach rechts und quadrire.

152. $\dfrac{\sqrt{a-bx}+\sqrt{c-mx}}{\sqrt{a-bx}+\sqrt{nx-d}}=\dfrac{\sqrt{a-bx}-\sqrt{c-mx}}{\sqrt{a-bx}-\sqrt{nx-d}}$

L. $x_1=\dfrac{a}{b}$, $x_2=\dfrac{c+d}{m+n}$

Durch corr. Add. (18. c) erhält man

$$\frac{\sqrt{a-bx}+\sqrt{c-mx}}{\sqrt{c-mx}-\sqrt{nx-d}}=\frac{\sqrt{a-bx}-\sqrt{c-mx}}{-\sqrt{c-mx}+\sqrt{nx-d}}$$

Diese Gleichung zerfällt in

1. $\sqrt{a-bx}+\sqrt{c-mx}=-\sqrt{a-bx}+\sqrt{c-mx}$ und
2. $\sqrt{c-mx}-\sqrt{nx-d}=0$

Auch durch Gleichnamigmachen kommt man leicht zum Ziel. Das giebt $\sqrt{a-bx}\cdot\sqrt{c-mx}=\sqrt{a-bx}\cdot\sqrt{nx-d}$ u. s. w.

---

153. $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{a}{b}$

L. $x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4b^2}}{2b}$, oder $=\dfrac{\sqrt{a+2b}\pm\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}\mp\sqrt{a-2b}}$

a. Die vorstehende Gleichung wird für viele der später folgenden Aufgaben von Wichtigkeit sein. Sie kann auch folgende Formen haben:

1. $x + \frac{1}{x} = \frac{a}{b}$

2. $\frac{x^2 + 1}{x} = \frac{a}{b}$

3. $x^2 - \frac{a}{b}\, x + 1 = 0$

4. $b x^2 - a x + b = 0$

Gleichungen dieser Art heissen symmetrische Gleichungen. Sie bleiben ungeändert, wenn man $\frac{1}{x}$ statt x setzt. In der geordneten und auf Null gebrachten Gleichung müssen die Coefficienten vorwärts und rückwärts dieselben sein. So ist

$$a x^4 + b x^3 + c x^2 + b x + a = 0$$

eine symmetrische Gleichung des 4. Grades.

Die 2. Form der Gleichung ist für die Auflösung, wenn man die Wurzeln unter einer symmetrischen Form haben will, die geeignetste, die 3. Form für die gewöhnliche Auflösung und um das Verhältniss der beiden Wurzeln zu einander zu zeigen. Da das letzte Glied gleich dem Producte der beiden Wurzeln sein muss, so ist bei symmetrischen quadratischen Gleichungen stets

$$x_1 \cdot x_2 = 1$$

oder

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \text{ und } x_2 = \frac{1}{x}$$

d. h. die Wurzeln sind zu einander reciprok.

b. Löst man auf dem gewöhnlichen Wege, so erhält man die erste Form des Resultats. Die andere Form kommt durch corr. Add. (s. 18. 7). Man hat aus der 2. Form der Gleichung

$$\frac{x^2 + 1}{2x} = \frac{a}{2b}$$

$$\frac{x^2 + 1 + 2x}{x^2 + 1 - 2x} = \frac{a + 2b}{a - 2b}$$

$$(1) \qquad \frac{x + 1}{x - 1} = \sqrt{\frac{a + 2b}{a - 2b}}$$

$$(2) \qquad x = \frac{\sqrt{a + 2b} \pm \sqrt{a - 2b}}{\sqrt{a + 2b} \mp \sqrt{a - 2b}} \text{ (s. 18.)}$$

Die erste Form der Lösung folgt aus dieser, wenn man hier die Wurzeln aus dem Nenner fortschafft.

So weitläufig diese Auflösung zu sein scheint, so einfach ist sie in Wirklichkeit, und sie würde nicht minder einfach sein,

als die gewöhnliche, wenn man sich für diese nicht ein für allemal die Formel der Lösung gemerkt hätte. Wer das Verfahren der corr. Add. nur ein wenig geübt hat, wird auch die Lösung sofort hinschreiben können. Ueberdies giebt es viele Gleichungen, wo dieser Weg der Auflösung nicht allein bei weitem der kürzere ist, sondern wo auch die weitere Entwickelung der Rechnung ein symmetrisches Resultat erfordert, wenn anders die Rechnung nicht viel complicirter werden soll, als nöthig ist. Die in diesem Buche vorkommenden Aufgaben werden dafür sehr viele Belege geben. — Die gewöhnliche Auflösung der quadratischen Gleichung ist auf diese Weise umgangen.

c. Aus der Gleichung (1) ersieht man, dass $\frac{x+1}{x-1}$ durch Ausziehung der Quadratwurzel gefunden wird; es muss sich daher auch, wenn man

$$(3) \qquad \frac{x+1}{x-1} = t \text{ oder } x = \frac{t+1}{t-1} \text{ (s. 18. 1)}$$

in der gegebenen Gleichung einsetzt, für t eine reine quadratische Gleichung ergeben. Man erhält aus a. 2. durch Einführung von t

$$\frac{(t+1)^2 + (t-1)^2}{t^2-1} = \frac{a}{b}$$

$$(4) \qquad \frac{t^2+1}{t^2-1} = \frac{a}{2b}$$

$$(5) \qquad t = \sqrt{\frac{a+2b}{a-2b}}$$

$$x = \frac{t+1}{t-1} = \frac{\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}}$$

Ebenso verlieren die symmetrischen Gleichungen höherer Grade durch die Substitution (3) ihre ungeraden Potenzen. Setzt man dann noch $t^2 = u$, so sind damit die Gleichungen des $2n$ten und des $(2n+1)$ten Grades auf Gleichungen des $n$ten Grades, die Gleichungen des 5. und 4. Grades auf quadratische Gleichungen reducirt.

d. Die beiden Wurzeln der Gleichung sind nach (2)

$$x_1 = \frac{\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}}$$

Aus dieser Form der Wurzeln erkennt man sofort, dass dieselben reziprok sind, wie schon oben in a. bemerkt ist; denn $x_1 \cdot x_2 = 1$.

e. Für die Berechnung, wenn a und b in grösseren Zahlen gegeben sind, ist die 2. Form der Lösung ebenso einfach als die 1. Form. Setzt man wie oben in (5)

$$\sqrt{\frac{a+2b}{a-2b}} = t,$$

so hat man

$$x_1 = \frac{t+1}{t-1},\ x_2 = \frac{t-1}{t+1}$$

f. Eine allgemeinere Form einer symmetrischen quadratischen Gleichung ist

$$\frac{mx^2 + m_1 x + m}{nx^2 + n_1 x + n} = \frac{M}{N}.$$

Daraus ist immer erst

$$\frac{x^2+1}{x} = \frac{Mn_1 - Nm_1}{Nm - Mn}$$

zu entwickeln. Dann weiter nach b.

Die folgenden Gleichungen sollen durch corr. Add. auf dem oben in b. angegebenen Wege gelöst werden. Man vergleiche die Beispiele 18, 7—14. Setzt man dort $v = 1$, so erhält man den folgenden ähnliche Gleichungen.

154. $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = a$ (vgl. 18, 8.).

L. $x = \frac{\sqrt{3a-1}+\sqrt{3-a}}{\sqrt{3a-1}-\sqrt{3-a}} = \frac{a+1+\sqrt{(3a-1)\ (3-a)}}{2\,(a-1)}$

155. $x^2 + 1 = a\,(x+1)^2$ (vgl. 18, 12.)

L. $x = \frac{1+\sqrt{2a-1}}{1-\sqrt{2a-1}} = \frac{a+\sqrt{2a-1}}{1-a}$

156. $x^2 + 1 = a\,(x-1)^2$

L. $x = \frac{\sqrt{2a-1}\pm 1}{\sqrt{2a-1}\mp 1} = \frac{a \pm \sqrt{2a-1}}{a-1}$

157. $\frac{x^3+x^2+x+1}{(x+1)^3} = \frac{m}{n}$

L. $x = \frac{\sqrt{n}+\sqrt{2m-n}}{\sqrt{n}-\sqrt{2m-n}}$

Man hebe zunächst links durch $x+1$.

158. $\frac{(x-1)^3}{x^3-1} = \frac{m}{n}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$

L. $x = \frac{\sqrt{m}+\sqrt{4n-3m}}{\sqrt{m}-\sqrt{4n-3m}} = \frac{2n-m+\sqrt{m\,(4n-3m)}}{2\,(m-n)}$,

dazu noch $x = 1$.

Die Gleichung hat 3 ungleiche Wurzeln. Man kann links durch $x - 1$ heben. Dann genügt zunächst noch $x - 1 = 0$, und es bleibt schliesslich noch eine symmetrische quadratische Gleichung.

159. $\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{m}{n}$

L. $x = \frac{\sqrt{2m - n} + \sqrt{n}}{\sqrt{2m - n} - \sqrt{n}}$

160. $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{m^2}{n^2}$

L. $x_1 = \frac{m + n}{m - n}, \quad x_2 = \frac{m - n}{m + n}$

161. $\frac{(x - 1)^3}{x^3 - 1} = 1$

L. $x_1 = 0, \quad x_2 = \infty$

162. $ax^2 - (a^2 + 1)\,x + a = 0$

L. $x_1 = a, \quad x_2 = \frac{1}{a}$

Es ist nämlich

$$\frac{x^2 + 1}{2x} = \frac{a^2 + 1}{2a}, \quad \frac{x + 1}{x - 1} = \pm\frac{a + 1}{a - 1} = \frac{a + 1}{\pm(a - 1)}$$

$$x = \frac{a + 1 \pm (a - 1)}{a + 1 \mp (a - 1)} \text{ u. s. w.}$$

163. $abx^2 - (a^2 + b^2)\,x + ab = 0$

L. $x_1 = \frac{a}{b}, \quad x_2 = \frac{b}{a}$

164. $6x^2 - 13x + 6 = 0$

L. $x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{2}{3}$

Es ist hier

$$\frac{x^2 + 1}{2x} = \frac{13}{12}, \quad \frac{x + 1}{x - 1} = \pm 5 = \frac{5}{\pm 1}, \quad x = \frac{5 \pm 1}{5 \mp 1} \text{ u. s. w.}$$

165. $3x^2 - 10x + 3 = 0$

L. $x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{1}{3}$

166. $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{m}{n}$

L. $x = a \cdot \frac{\sqrt{m + 2n} + \sqrt{m - 2n}}{\sqrt{m + 2n} - \sqrt{m - 2n}}$

Diese Gleichung ist symmetrisch in Bezug auf x und a. Setzt man $a = 1$, so erhält man 153. Den dort in a. angegebenen Formen entsprechen hier

1. $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{m}{n}$

2. $\frac{x^2 + a^2}{ax} = \frac{m}{n}$

3. $x^2 - \frac{m}{n} ax + a^2 = 0$

4. $nx^2 - max + na^2 = 0$

Die allgemeinere Form einer solchen Gleichung würde sein

$$\frac{mx^2 + m_1 ax + ma^2}{nx^2 + n_1 ax + na^2} = \frac{M}{N}$$

Um die oben angegebene symmetrische Form der Lösung zu erhalten, sucht man nach 18, 7. und 8. immer erst $\frac{x^2 + a^2}{ax}$. Im vorliegenden Falle hat man

$$\frac{x^2 + ax}{ax} = \frac{m}{n}, \quad \frac{x^2 + a^2}{2ax} = \frac{m}{2n}, \quad \frac{x + a}{x - a} = \sqrt{\frac{m + 2n}{m - 2n}}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{m + 2n} + \sqrt{m - 2n}}{\sqrt{m + 2n} - \sqrt{m - 2n}} \text{ u. s. w.}$$

Hier sind die beiden Werthe für $\frac{x}{a}$ reziprok, nicht die für x selber.

167. $\frac{x^2 + ax + a^2}{x^2 - ax + a^2} = c.$

L. $x = a \cdot \frac{\sqrt{3c - 1} + \sqrt{3 - c}}{\sqrt{3c - 1} - \sqrt{3 - c}}$.

168. $\frac{x^2 + a^2}{x^2 - ax + a^2} = c$

L. $x = a \cdot \frac{\sqrt{3c - 2} + \sqrt{2 - c}}{\sqrt{3c - 2} - \sqrt{2 - c}}$

169. $\frac{x^2 + a^2}{(x + a)^2} = c$

L. $x = a \cdot \frac{1 + \sqrt{2c - 1}}{1 - \sqrt{2c - 1}}$

170. $x = \frac{(a^2 + b^2)\, x - (a^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)\, x - (a^2 + b^2)}$

L. $x_1 = \frac{a + b}{a - b}, \quad x_2 = \frac{a - b}{a + b}$

171. $x^2 - 2ax + b^2 = 0$

L. $x = a + \sqrt{a^2 - b^2}$, oder $x = b \cdot \frac{\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b}}{\sqrt{a + b} - \sqrt{a - b}}$

a) Obwohl diese Gleichung nicht zu den symmetrischen gehört, so kann sie doch ebenso aufgelöst werden. Das mittlere

Glied hat keinen wesentlichen Einfluss auf die Auflösung. Es kommt nur darauf an, dass das letzte Glied der geordneten Gleichung ein positives Quadrat ist, oder ein Quadrat mit demselben Coefficienten wie das erste Glied x^2. Die Auflösung durch corr. Add. macht sich hier so:

$$x^2 + b^2 = 2ax, \quad \frac{x^2+b^2}{2bx} = \frac{a}{b}, \quad \frac{x+b}{x-b} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \text{ u. s. w.}$$

In dem vorliegenden Falle hat die gewöhnliche Lösung wegen ihrer Form sowohl, als ihrer Kürze den Vorzug. Es werden jedoch späterhin viele Fälle vorkommen, wo es zweckmässiger ist, die Auflösung mit Hülfe der corr. Add. zu beschaffen.

b) Man kann die corr. Addition auch zur Auflösung einer jeden quadratischen Gleichung anwenden. Ist nämlich allgemein die Gleichung

$$x^2 - ax + b = 0$$

gegeben, so hat man

$$x^2 + b = ax$$

$$\frac{x^2+b}{2x\sqrt{b}} = \frac{a}{2\sqrt{b}}$$

$$\frac{x+\sqrt{b}}{x-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+2\sqrt{b}}{a-2\sqrt{b}}}$$

$$x = \sqrt{b} \cdot \frac{\sqrt{a+2\sqrt{b}} + \sqrt{a-2\sqrt{b}}}{\sqrt{a+2\sqrt{b}} + \sqrt{a-2\sqrt{b}}}$$

Man hat hierin den Beweis des in a) Gesagten: nur, wenn das 3. Glied (hier b) ein Quadrat ist, wird die Form der Lösung einfach. Schafft man die Wurzeln aus dem Nenner fort, so erhält man

$$x = \frac{\left(\sqrt{a+2\sqrt{b}} + \sqrt{a-2\sqrt{b}}\right)^2}{4} = \frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

Setzt man hierin

$$a^2 - 4b = c,$$

also

$$4b = a^2 - c \qquad 2\sqrt{b} = \sqrt{a^2-c},$$

und radicirt, so kommt mit Vertauschung der Seiten

$$\sqrt{a+\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-c}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-c}}{2}}$$

Dies ist die bekannte Formel für die Ausziehung der Quadratwurzel aus einem Binom von der Form $a + \sqrt{c}$. Sie giebt eine

Vereinfachung des Radicanden, wenn $a^2 - c$ ein Quadrat ist. Die Auflösung der quadratischen Gleichungen durch corr. Addition macht die Benutzung dieser Formel überflüssig, man erhält immer den einfachsten Radicanden.

172. $\frac{a-x}{x-b} + \frac{x-b}{a-x} = \frac{m}{n}$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sqrt{\frac{m-2n}{m+2n}}$

a) Diese Gleichung ist symmetrisch in Bezug auf

$$\frac{a-x}{x-b}, \text{ oder } \frac{x-b}{a-x}$$

Man kann also diese Grössen auf dem in 153, b. und 166. angegebenen Wege finden. Man hat nämlich

$$\frac{(a-x)^2 + (x-b)^2}{2(a-x)(x-b)} = \frac{m}{2n}$$

$$\frac{(a-x) - (x-b)}{(a-x) + (x-b)} = \sqrt{\frac{m-2n}{m+2n}} \text{ u. s. w.}$$

Hier ist schon die Auflösung auf dem gewöhnlichen Wege nicht ganz so einfach.

b) Etwas allgemeiner ist die Auflösung, dass man $\frac{a-x}{x-b}$ zunächst als die Unbekannte ansieht und dann in gewöhnlicher Weise löst. Man hat

$$n\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 - m\left(\frac{a-x}{x-b}\right) + n = 0$$

$$\frac{a-x}{x-b} = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4n^2}}{2n}$$

Setzt man diesen Ausdruck $= r$, so wird

$$x = \frac{a+br}{r+1}$$

173. $\frac{(a-x)^2 + (x-b)^2}{(a-x)(x-b)} = \frac{13}{6}$

L. $x_1 = \frac{3a+2b}{5}$, $x_2 = \frac{2a+3b}{5}$

174. $\frac{(a-x)^2 + (b-x)^2}{(a-x)(b-x)} = \frac{5}{2}$

L. $x_1 = 2a - b$, $x_2 = 2b - a$

175. $\frac{(x+a)^2 + (x-b)^2}{(x+a)^2 - (x-b)^2} = \frac{a^2+b^2}{2ab}$

L. $x_1 = \frac{a^2+b^2}{2b}$, $x_2 = \frac{(a+b)^2}{2a} - a$

Man wende corr. Add. an, radicire und wende wieder corr. Add. an.

176. $\dfrac{(a-x)^2-(x-b)^2}{(a-x)\,(x-b)} = \dfrac{4ab}{a^2-b^2}$

L. $x_1 = \dfrac{a^2+b^2}{2a}$, $x_2 = \dfrac{a^2+b^2}{2b}$

Hier ist der gewöhnliche Weg wohl der einfachste; sonst muss man den in 172. b angedeuteten einschlagen. Darnach hat man

$$\frac{a-x}{x-b} - \frac{x-b}{a-x} = \frac{4ab}{a^2-b^2}$$

$$\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 - \frac{4ab}{a^2-b^2}\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 1$$

Daraus folgt

$$\frac{a-x}{x-b} = \frac{2ab \pm (a^2+b^2)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a-x_1}{x_1-b} = \frac{a+b}{a-b},\quad \frac{a-x_2}{x_2-b} = -\frac{a-b}{a+b} \text{ u. s. w.}$$

177. $\dfrac{(a-x)^2+(a-x)\,(x-b)+(x-b)^2}{(a-x)^2-(a-x)\,(x-b)+(x-b)^2} = \dfrac{49}{19}$

L. $x_1 = \dfrac{5a+3b}{8}$, $x_2 = \dfrac{3a+5b}{8}$

178. $\dfrac{(a-x)^2+(b-x)^2}{(a-x)^2+(a-x)\,(b-x)+(b-x)^2} = \dfrac{34}{49}$

L. $x_1 = \dfrac{5a-3b}{2}$, $x_2 = \dfrac{5b-3a}{2}$

179. $\dfrac{2a^2+a\,(a-x)+(a+x)^2}{2a^2+a\,(a+x)+(a-x)^2} = \dfrac{c+1}{c-1}$

L. $x = 2a\cdot\dfrac{\sqrt{c+4}+\sqrt{c-4}}{\sqrt{c+4}-\sqrt{c-4}}$, oder $x = \frac{1}{2}a\left(c+\sqrt{c^2-16}\right)$

Man hat zunächst

$$\frac{4a^2+ax+x^2}{4a^2-ax+x^2} = \frac{c+1}{c-1}$$

Daraus durch corr. Add.

$$\frac{4a^2+x^2}{ax} = c$$

Je nachdem man jetzt durch corr. Add. weiter löst oder nach der gewöhnlichen Methode verfährt, erhält man die 1. oder die 2. Form der Lösung.

180. $\dfrac{a+b-2x}{\sqrt{(a-x)\,(b-x)}} = \dfrac{m}{n}$

L. $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{(a-b)\,m}{2\sqrt{m^2-4n^2}}$

Setzt man $\sqrt{(a-x)^2} + \sqrt{(b-x)^2}$ für $a + b - 2x$, so sieht man leicht, dass die Gleichung symmetrisch ist für $\sqrt{a-x}$ und $\sqrt{b-x}$, also die corr. Add. ihre Anwendung findet (s. 18. 16.). Man quadrire, multiplicire die Nenner mit 4, subtrahire den Nenner vom Zähler nach der corr. Add. und radicire, so giebt das $\frac{(a-x)+(b-x)}{(a-x)-(b-x)} = \frac{m}{\sqrt{m^2-4n^2}}$, d. h. $\frac{a+b-2x}{a-b} = \frac{m}{\sqrt{m^2-4n^2}}$ etc.

Nimmt man Zahlen und setzt

$\frac{m}{n} = \frac{10}{3}$, so erhält man $x_1 = \frac{9a-b}{8}$, $x_2 = \frac{9b-a}{8}$

$\frac{m}{n} = \frac{5}{2}$, „ „ „ $x_1 = \frac{4a-b}{3}$, $x_2 = \frac{4b-a}{3}$

181. $\frac{a+b-2x}{\sqrt{(a-x)(x-b)}} = \frac{m}{n}$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{(a-b)m}{2\sqrt{m^2+4n^2}}$

Auch hier verfährt man ganz wie in der vorigen Aufgabe und schreibt sofort hin

$$\frac{(a-x)-(x-b)}{(a-x)+(x-b)} = \frac{m}{\sqrt{m^2+4n^2}}$$

Setzt man

$\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$, so wird $x_1 = \frac{4a+b}{5}$, $x_2 = \frac{a+4b}{5}$

$\frac{m}{n} = \frac{8}{3}$, „ „ $x_1 = \frac{9a+b}{10}$, $x_2 = \frac{a+9b}{10}$

Bei den folgenden 5 Aufgaben wird es zweckmässig sein, die Gleichung zunächst auf die Form 180. oder 181. zu bringen.

182. $\frac{\sqrt{(a-x)^2} + \sqrt{(a-x)(b-x)} + \sqrt{(b-x)^2}}{\sqrt{(a-x)^2} - \sqrt{(a-x)(b-x)} + \sqrt{(b-x)^2}} = \frac{m}{n}$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \frac{m+n}{\sqrt{(3m-n)(3n-m)}}$

$\frac{m}{n} = \frac{7}{3}$, giebt $x_1 = \frac{4a-b}{3}$, $x_2 = \frac{4b-a}{3}$

$\frac{m}{n} = \frac{19}{7}$, „ $x_1 = \frac{9a-4b}{5}$, $x_2 = \frac{9b-4a}{5}$

183. $\frac{\sqrt{(a-x)^2} + \sqrt{(a-x)(x-b)} + \sqrt{(x-b)^2}}{\sqrt{(a-x)^2} - \sqrt{(a-x)(x-b)} + \sqrt{(x-b)^2}} = \frac{m}{n}$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \frac{\sqrt{(3m-n)(3n-m)}}{m+n}$

Da $\sqrt{(a-x)^2} + \sqrt{(x-b)^2} = a - b$ ist, so kommt man hier auch sehr einfach zum Ziele, wenn man $\sqrt{(a-x)\,(x-b)}$ isolirt, dann quadrirt etc.

$\frac{m}{n} = 3$, giebt $x_1 = x_2 = \frac{a+b}{2}$

$\frac{m}{n} = \frac{7}{3}$, „ $x_1 = \frac{4a+b}{5}$, $x_2 = \frac{4b+a}{5}$

184. $\frac{a+b-2x}{(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x})^2} = \frac{m}{n}$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{(a-b)\,m}{2\sqrt{2mn-n^2}}$

$\frac{m}{n} = \frac{17}{32}$, giebt $x_1 = \frac{25a-9b}{16}$, $x_2 = \frac{25b-9a}{16}$

Hätte man $\sqrt{x-b}$ statt $\sqrt{b-x}$, so wäre die Gleichung nicht mehr quadratisch, sondern einfach. Es wäre nämlich

$$\frac{\sqrt{(a-x)^2} - \sqrt{(x-b)^2}}{(\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b})^2} = \frac{m}{n},$$

man könnte also links durch $\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}$ heben. Es bliebe nur

$$\frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}} = \frac{m}{n}$$

Daraus folgt

$$\sqrt{\frac{a-x}{x-b}} = \frac{n+m}{n-m}, \text{ also } \frac{a-x}{x-b} = \left(\frac{n+m}{n-m}\right)^2$$

Mithin durch corr. Add.

$$\frac{a+b-2x}{a-b} = \frac{2mn}{m^2+n^2}, \; x = \frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)\,mn}{m^2+n^2}$$

185. $\frac{(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x})^2}{\sqrt{(a-x)\,(b-x)}} = \frac{m}{n}$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \frac{m-2n}{\sqrt{m^2-4mn}}$

$\frac{m}{n} = \frac{100}{21}$, liefert $x_1 = \frac{49a-9b}{40}$, $x_2 = \frac{49b-9a}{40}$

186. $\frac{(\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b})^2}{\sqrt{(a-x)\,(x-b)}} = \frac{m}{n}$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \frac{\sqrt{m^2-4mn}}{m-2n}$

$\frac{m}{n} = \frac{25}{6}$, liefert $x_1 = \frac{9a+4b}{13}$, $x_2 = \frac{9b+4a}{13}$

187. $\dfrac{2a + (1 + a^2)\,x}{1 + a^2 + 2ax} = \dfrac{2b - (1 + b^2)\,x}{1 + b^2 - 2bx}$

L. $x_1 = \dfrac{a - b}{1 - ab}$, $x_2 = \dfrac{1 - ab}{a - b}$

Macht man gleichnamig, so erhält man die symmetrische Gleichung

$$\frac{x^2 + 1}{2x} = \frac{(a - b)^2 + (1 - ab)^2}{2(a - b)\,(1 - ab)},$$

welche durch corr. Addition leicht weiter zu lösen ist.

188. $\dfrac{ax + b}{bx + a} = \dfrac{mx - n}{nx - m}$

L. $x = \dfrac{\sqrt{(a - b)\,(m + n)} + \sqrt{(a + b)\,(m - n)}}{\sqrt{(a - b)\,(m + n)} - \sqrt{(a + b)\,(m - n)}}$, oder

$$x = \frac{am - bn + \sqrt{(a^2 - b^2)\,(m^2 - n^2)}}{an - bm}$$

Die letzte Form der Lösung kommt auf dem gewöhnlichen Wege, die erste durch corr. Add. Man hat

$$\frac{x^2 + 1}{2x} = \frac{am - bn}{an - bm}$$

$$\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2 = \frac{am - bn + an - bm}{am - bn - an + bm} = \frac{(a - b)\,(m + n)}{(a + b)\,(m - n)}$$

Sind für a, b, m und n grosse Zahlen gegeben, so ist die Berechnung von x mit Hülfe der ersten Formel am einfachsten; denn setzt man

$$\sqrt{\frac{(a + b)\,(m - n)}{(a - b)\,(m + n)}} = r,$$

so hat man

$$x_1 = \frac{1 + r}{1 - r}, \quad x_2 = \frac{1 - r}{1 + r}$$

189. $\dfrac{ax - b}{bx - a} = \dfrac{mx - n}{m - nx}$

L. $x = \dfrac{\sqrt{(a + b)\,(m + n)} + \sqrt{(a - b)\,(m - n)}}{\sqrt{(a + b)\,(m + n)} - \sqrt{(a - b)\,(m - n)}}$

Die gewöhnliche Auflösung giebt

$$x = \frac{am + bn + \sqrt{(a^2 - b^2)\,(m^2 - n^2)}}{an + bm}$$

190. $\dfrac{a - bx}{ax + b} = \dfrac{nx - m}{mx + n}$

L. $x = \dfrac{am - bn + \sqrt{(a^2 + b^2)\,(m^2 + n^2)}}{an + bm}$

Man kann auch hier durch corr. Add. eine Form der Lösung erhalten, welche der ersten Form in 188. und 189. analog ist, aber man muss schon das Imaginäre zu Hülfe nehmen und für

$$\frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{am - bn}{an + bm}$$

schreiben

$$\frac{x^2 + i^2}{2ix} = \frac{am + bni^2}{ani + bmi},$$

wo i statt $\sqrt{-1}$ gesetzt ist. Dann erhält man

$$x = i \cdot \frac{\sqrt{(a + bi)(m + ni)} + \sqrt{(a - bi)(m - ni)}}{\sqrt{(a + bi)(m + ni)} - \sqrt{(a - bi)(m - ni)}}$$

C.

Kubische Gleichungen mit einer ausgezeichneten oder einer leicht erkennbaren Wurzel.

Ausgezeichnet heissen die Wurzeln 0 und ∞. Erstere hat statt, wenn die Gleichung einen Factor x hat, letztere wenn die höchste Potenz von x (bei kubischen Gleichungen also die dritte) fortfällt (s. 113.). Leicht erkennbar sind die Wurzeln, die aus der Zerlegung der Gleichung hervorgehen (s. 92.).

Wie die quadratischen Gleichungen zwei Wurzeln liefern, so liefern die kubischen Gleichungen drei Wurzeln.

Ist a eine Wurzel der Gleichung, so muss $x - a$ ein Factor der linken Seite der auf 0 gebrachten Gleichung sein (vgl. 105.). Scheidet man diesen Factor aus, so bleibt nur noch eine quadratische Gleichung zu lösen übrig.

191. $x^3 + (a - x)^3 = a^3$

L. $x_1 = 0,\ x_2 = a,\ x_3 = \infty$

Die Gleichung kann auch in folgender Form erscheinen:

$$x + \sqrt{a^3 - x^3} = a$$

192. $\frac{a + x}{a - x} = \left(\frac{b + x}{b - x}\right)^2$

L. $x = 0,\ \sqrt{2ab - b^2}$

Die Auflösung geschieht hier mittelst corr. Add. Man hat sofort

$$\frac{a}{x} = \frac{b^2 + x^2}{2bx}$$

1. $x = 0$ 2. $a = \frac{b^2 + x^2}{2b}$

Die Gleichung kann auch in folgender Form erscheinen;

$$(b + x)\sqrt{a - x} = (b - x)\sqrt{a + x}$$

193. $(x - 1)^3 = x^3 - 1$

L. $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = \infty$

Die Gleichung hat einen Factor $x - 1$; sie zerfällt also in

1. $x - 1 = 0$ 2. $(x - 1)^2 = x^2 + x + 1$

194. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

L. $x = -1, \sqrt{-1}$

Man zerlege links in Factoren, und löse weiter nach 92.

195. $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$

L. $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = \frac{1}{2}$

Die Gleichungen 194. und 195. sind symmetrische Gleichungen des 3. Grades (vgl. 153.—170.). Sie bleiben ungeändert, wenn man $\frac{1}{x}$ statt x setzt. Eine solche Gleichung muss, auf 0 gebracht und geordnet, links immer einen Factor $x + 1$ oder $x - 1$ haben, d. h. eine Wurzel -1 oder $+1$, jenachdem die Zeichen dieselben bleiben oder abwechseln. Scheidet man den Factor $x + 1$ oder $x - 1$ aus, so bleibt noch eine symmetrische quadratische Gleichung zu lösen übrig.

196. $x^3 - 1 = 0$

L. $x = 1, \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$

197. $x^3 + 1 = 0$

L. $x = -1, \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$

198. $(a - x)^2 (x - b) = (a - x)(x - b)^2$

L. $x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_3 = \frac{a + b}{2}$

Die Gleichung lässt sich zerlegen in

1. $a - x = 0$ 2. $x - b = 0$ 3. $a - x = x - b$

Auch die 6 folgenden Gleichungen lassen sich leicht durch Zerlegung lösen.

199. $(a + x)^2 (a - x) = (a + x) (a - x)^2$

L. $x = 0, \pm a$

200. $(x^2 - a^2) (x - a) = b^2 (x + a)$

L. $x = -a, a \pm b$

201. $\frac{a (x - b)^2 + b (a - x)^2}{(a - x)^2 + (x - b)^2} = x$

L. $x = a, b, \frac{a+b}{2}$

202. $\frac{(a - x)^2 b - (b - x)^2 a}{(a - x)^2 - (b - x)^2} = x$

L. $x = a, b, \infty$

203. $\frac{x - a}{x - b} = \frac{ax - a^2}{x^2 - b^2}$

L. $x = a, b, a - b$

204. $\frac{a - x}{x - b} = \frac{ab}{x^2 - b^2}$

L. $x = 0, a - b, b$

205. $(a - x)^3 = (x - b)^3$

L. $x = \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sqrt{-3}$

Bringt man das 2. Glied nach links, so zerfällt die Gleichung in

1. $(a - x) - (x - b) = 0$ 2. $(a - x)^2 + (a - x) (x - b) + (x - b)^2 = 0$

Dass übrigens der Gleichung durch $a - x = x - b$ genügt wird, erkennt man sofort. Wie man aber weiter löst, wenn eine Wurzel bekannt ist, ist oben angegeben (s. C. zu Anfang).

206. $(x - a)^3 + (x - b)^3 = 0$

L. wie in 205.

207. $x\sqrt{x} - 3x + 2\sqrt{x} = 0$

L. $x = 0, 1, 4$

208. $\frac{a\sqrt{x - b} + b\sqrt{a - x}}{\sqrt{a - x} + \sqrt{x - b}} = x$

L. $x = a, b, \frac{a+b}{2}$

209. $\frac{(a + x)\sqrt{a - x} + (b + x)\sqrt{b - x}}{\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x}} = a + b$

L. $x = a, b, \infty$

210. $\dfrac{a\sqrt{a-x}+b\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=x$

L. $x=\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a+b}{2}+\dfrac{a-b}{2}\sqrt{-3}$ (vgl. 205.)

211. $\dfrac{(a+x)\sqrt{x-b}+(x+b)\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=a+b$

L. wie in 210.

212. $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\dfrac{a}{x}$

L. $x=0, \pm a$

213. $\dfrac{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}}=\dfrac{b}{x}$

L. $x=b, \dfrac{(a-b)\,b}{a+3b}, \infty$

214. $\dfrac{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}}=\dfrac{a-b}{b-x}$

L. $x=a, \dfrac{4b-a}{3}, \infty$

215. $\dfrac{a+x}{b+x}-\dfrac{a-x}{b-x}=\dfrac{x}{c}$

L. $x=0, \sqrt{2\,(a-b)\,c+b^2}$

216. $\left(\dfrac{a+2x}{a-2x}\right)^2=\dfrac{5a-4b+4x}{5a-4b-4x}$

L. $x=0, \sqrt{a\,(a-b)}$

Man wende zunächst corr. Add. an.

217. $\left(\dfrac{x-3a+5b}{x+5a-3b}\right)^2=\dfrac{5x-11a+5b}{5x+5a-11b}$

L. $x=\infty, \sqrt{5a^2-6ab+5b^2}$

218. $2x^2+a\sqrt{b^2+4bx}=a\,(b+2x)$

L. $x=0, a+\sqrt{ab}$

219. $x=\sqrt{a\,(x-b)}+\sqrt{b\,(x-a)}$

L. $x=0, a+b, a+b$

Die Gleichung hat 2 gleiche Wurzeln $a+b$.

220. $x=\sqrt{1+ax}-\sqrt{1-ax}$

L. $x=0, 2\sqrt{1-a^2}$

221. $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{a}{x}}=\dfrac{2a}{x}$

L. $x=a, \dfrac{a}{2}\left(-3+\sqrt{-7}\right)$

Man übersieht sofort, dass $x = a$ genügt. Es sind daher nur noch die beiden andern Wurzeln zu suchen.

222. $\dfrac{x^3 + (a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} = a^2$

L. $x = 0, \pm a$

Man kann links durch den Nenner heben wegen $u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$ und erhält

$$x^2 - x\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{(a^2 - x^2)^2} = a^2$$

$$\text{d. h. } x\sqrt{a^2 - x^2} = 0$$

223. $\dfrac{(a+x)^2\sqrt{a+x} + (a-x)^2\sqrt{a-x}}{(a+x)\sqrt{a-x} + (a-x)\sqrt{a+x}} = a$

L. $x = 0, \; a\sqrt{-15}$

Man kann links durch $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}$ heben nach dem Satze

$$\frac{u^5 + v^5}{u + v} = u^4 + v^4 - uv(u^2 + v^2) + u^2v^2.$$

Oder man bringt den Nenner nach rechts, zieht die Glieder mit gleichen Wurzeln zusammen u. s. w.

224. $(a-x)\sqrt{b+x} - (b+x)\sqrt{a-x} = ab\left(\dfrac{1}{\sqrt{b+x}} - \dfrac{1}{\sqrt{a-x}}\right)$

L. $x = 0, \; a - b, \; \frac{1}{2}(a - b)$

Die Gleichung zerfällt in

1. $(a - x)(b + x) = ab$ 2. $\sqrt{a - x} - \sqrt{b + x} = 0$

225. $\dfrac{\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x} - \sqrt{x-b}} = \dfrac{a-b}{a+b-2x}$

L. $x = a, \; b, \; \dfrac{a+b}{2}$

226. $\dfrac{5a - x}{3(a - x)} = \dfrac{5a - x}{\sqrt{3(7a + x)(a - x)}}$

L. $x = 5a, \pm a$

Die Gleichung zerfällt in

1) $5a - x = 0$ 2) $\sqrt{a - x} = 0$ 3) $3\sqrt{a - x} = \sqrt{3(7a + x)}$

227. $\dfrac{\sqrt{x+a} + 2\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} - 2\sqrt{x-a}} = \dfrac{x + 3a}{x - a}$

L. $x = -a, \pm a\sqrt{2}$

Man wende corr. Addition an und quadrire. Dann weiter durch Zerlegung. — Ebenso sind die beiden folgenden Aufgaben zu lösen.

228. $\dfrac{\sqrt{x+a}+2\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-2\sqrt{x-a}}=\dfrac{x+a+2b}{x+a-2b}$

L. $x=-a,\ \sqrt{a^2+b^2}$

229. $\dfrac{\sqrt{a+b+x}-\sqrt{a+b-x}}{\sqrt{a+b+x}+\sqrt{a+b-x}}=\dfrac{x-a}{a+2b-x}$

L. $x=a+b,\ \sqrt{a^2+2ab}$

230. $\dfrac{\sqrt{5x-7a}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{5x-7a}-\sqrt{x+a}}=\sqrt{\dfrac{2x+a}{x-4a}}$

L. $x=a,\ \frac{1}{2}a\left(3+\sqrt{41}\right)$

Man quadrire und wende corr. Add. an, so erhält man

$$\frac{3(x-a)}{\sqrt{(5x-7a)(x+a)}}=\frac{3(x-a)}{x+5a}$$

Jetzt weiter durch Zerlegung wie in 226. Aehnlich hat man bei den folgenden Aufgaben zu verfahren.

231. $\dfrac{\sqrt{2a+x}+\sqrt{3(2a-x)}}{\sqrt{2a+x}-\sqrt{3(2a-x)}}=\sqrt{\dfrac{2a+x}{2(a-x)}}$

L. $x=4a,\ \pm a$

232. $\dfrac{\sqrt{7a+x}-\sqrt{3(a-x)}}{\sqrt{7a+x}+\sqrt{3(a-x)}}=\sqrt{\dfrac{a+x}{2(2a-x)}}$

L. $x=5a,\ \pm a$ (vgl. 226.)

233. $\dfrac{\sqrt{x+a}+2\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-2\sqrt{x-a}}=\sqrt{\dfrac{5x+a}{5x-7a}}$

L. $x=\frac{3}{5}a,\ a\sqrt{2}$

234. $\dfrac{\sqrt{4a+b-4x}-\sqrt{b}}{\sqrt{4a+b-4x}+\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+b-2x}{a}}$

L. $x=\dfrac{2a+b}{2},\ \sqrt{ab}$

235. $\dfrac{\sqrt{x+a}+2\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-2\sqrt{x-a}}=\sqrt{\dfrac{5x-3a+4b}{5x-3a-4b}}$

L. $x=\frac{3}{5}a,\ \sqrt{a^2+b^2}$

236. $\dfrac{\sqrt{3a-4b+5x}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{3a-4b+5x}-\sqrt{x-a}}=\sqrt{\dfrac{x+a}{2(x-b)}}$

L. $x=\dfrac{2b-a}{3},\ \sqrt{a^2+b^2}$

237. $\dfrac{\sqrt{7a-b+x}-\sqrt{3(a-7b-x)}}{\sqrt{7a-b+x}+\sqrt{3(a-7b-x)}}=\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a-7b+x}{a-b-\frac{1}{2}x}}$

L. $x=5a-11b,\ \sqrt{a^2-14ab+b^2}$

238. $\dfrac{\sqrt{14x+2a+13b}+\sqrt{3\,(2x-2a-b)}}{\sqrt{14x+2a+13b}-\sqrt{3\,(2x-2a-b)}}=\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2x+2a+b}{2x-a+b}}$

L. $x=\dfrac{2a-5b}{10}$, $\sqrt{a^2+ab+b^2}$

239. $\dfrac{\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}-\sqrt{x-a}}=\sqrt{\dfrac{x+a+c}{x+a-c}}$

L. $x=-a$, $\sqrt{a^2+c^2}$

Man quadrire und wende corr. Add. an, so erhält man

$$\frac{x+a+\sqrt{2a\,(x+a)}}{(\sqrt{x+a}+\sqrt{2a})\sqrt{x-a}}=\frac{x+a}{c}.$$

Links lässt sich der Bruch heben durch $\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}$. Die dann noch bleibende Gleichung ist durch Zerlegung weiter zu lösen.

240. $\dfrac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}-\sqrt{2a}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}}=\sqrt[4]{\dfrac{x+c}{x-c}}$

L. $x=0$, $\sqrt{a^2+c^2}$

Man verfahre ganz wie in der vorigen Aufgabe. Das giebt, nachdem man den Bruch links durch $\sqrt{x+a}-\sqrt{2a}$ gehoben hat

$$\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}=\frac{\sqrt{x+c}+\sqrt{x-c}}{\sqrt{x+c}-\sqrt{x-c}}$$

Diese Gleichung ist zu lösen wie 230.—38., d. h. man hat dasselbe Verfahren noch einmal zu wiederholen.

241. $\dfrac{\sqrt{a-x}+\sqrt{c}}{\sqrt[4]{a-x}}=\dfrac{\sqrt{x-b}+\sqrt{c}}{\sqrt[4]{x-b}}$

L. $x=\dfrac{a+b}{2}$, $\dfrac{a+b+\sqrt{(a-b)^2-4c^2}}{2}$

Man mache gleichnamig, so kommt leicht

$$(\sqrt[4]{a-x}-\sqrt[4]{x-b})\sqrt[4]{(a-x)\,(x-b)}=\sqrt{c}\,(\sqrt[4]{a-x}-\sqrt[4]{x-b})$$

Man hat also weiter zu lösen

1. $\sqrt[4]{a-x}-\sqrt[4]{x-b}=0$ 2. $\sqrt[4]{(a-x)\,(x-b)}=\sqrt{c}$

242. $\dfrac{a\,(x+a-b)}{b\,(x-a+b)}=\left(\dfrac{x+7a-b}{x-a+7b}\right)^2$

L. $x=a+b$, $\sqrt{a^2+34ab+b^2}$

Man schreibe die Gleichung so:

$$\frac{(x+a-b)\,(x-a+7b)}{(x-a+b)\,(x+7a-b)}=\frac{b\,(x+7a-b)}{a\,(x-a+7b)},$$

multiplicire aus und wende corr. Add. an, so erscheint, nachdem

man mit $a - b$ gehoben hat, ein Factor $a + b - x$, welcher, $= 0$ gesetzt, die erste Wurzel liefert.

243. $\frac{17a + b + x}{a + 17b + x} = \frac{a^2 (a + 5b - x)^2}{b^2 (5a + b - x)^2}$

L. $x = \frac{a^2 - 6ab + b^2}{a + b}$, $\sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$

244. $\frac{a^2 (a + 17b + x)}{b^2 (17a + b + x)} = \left(\frac{7a - b + x}{7b - a + x}\right)^2$

L. $x = \frac{a^2 - 30ab + b^2}{a + b}$, $\sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$

D.

Complicirtere quadratische Gleichungen, insonderheit von der Form $Ax^{2n} + Bx^n + C = 0$, Gleichungen mit geometrischer Deutung u. s. w.

245. $\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + x = 0$

L. $x = 0,\ 1,\ 16$

Die Gleichung hat links einen Factor $\sqrt{x}$. Setzt man diesen $= 0$, so hat man die erste Wurzel. Dann bleibt noch $\sqrt[4]{x} - 2 + \sqrt{x} = 0$, woraus man $\sqrt[4]{x}$ finden kann; denn man hat

$$(\sqrt[4]{x})^2 + \sqrt[4]{x} = 2$$

also $\sqrt[4]{x} = 1, -2$ u. s. w.

246. $2x^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{3}{3}} = 0$

L. $x = 0,\ 1,\ 8$

Der Factor $x^{\frac{1}{3}}$, $= 0$ gesetzt, liefert die erste Wurzel. Dann bleibt noch eine quadratische Gleichung für $x^{\frac{1}{3}}$ zu lösen übrig. Man findet $x^{\frac{1}{3}} = 1,\ 2$.

247. $x^{\frac{7}{2}} + 8x^{\frac{1}{2}} = 9x^2$

L. $x = 0,\ 1,\ 4$

Man findet ausser $x^{\frac{1}{2}} = 0$, woraus $x = 0$ folgt, noch $x^{\frac{3}{2}} = 1,\ 8$. — Will man auch die imaginären Wurzeln mit-

rechnen, so sind noch $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ und $2(-1 \pm \sqrt{-3})$ zu den drei oben angegebenen hinzuzufügen.

248. $a x^{2m} + b x^{m+n} + c x^{2n} = 0$

L. $x = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^{\frac{1}{m-n}}$

Man hat die Gleichung durch x^{2n} zu dividiren, so erhält man eine quadratische Gleichung für x^{m-n}.

Ist allgemein die Gleichung

$$a x^m + b x^n + c x^p = 0$$

gegeben, wo die Glieder so geordnet sein mögen, dass die Exponenten der Grösse nach auf einander folgen, so lässt sie sich immer wie eine quadratische Gleichung lösen, wenn n das arithmetische Mittel zwischen m und p, d. h. $n = \frac{m+p}{2}$ ist. Setzt man dies für n und dividirt die Gleichung durch x^p, so erhält man

$$a x^{m-p} + b x^{\frac{m-p}{2}} + c = 0$$

$$x^{\frac{m-p}{2}} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^{\frac{2}{m-p}}$$

249. $a x^{\frac{1}{2}} + b x^2 = c x^{-1}$

L. $x = \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4bc}}{2b}\right)^{\frac{2}{3}}$

250. $a x^{\frac{2}{3}} + b x^{\frac{3}{2}} = c x^{-\frac{1}{6}}$

L. $x = \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4bc}}{2b}\right)^{\frac{6}{5}}$

251. $a x^{\frac{2}{3}} + b x^{\frac{3}{2}} = c x^{\frac{13}{12}}$

L. $x = \left(\frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2b}\right)^{\frac{12}{5}}$

252. $a^4 + b^4 + x^4 = 2a^2b^2 + 2a^2x^2 + 2b^2x^2$

L. $x = \pm (a + b), \pm (a - b)$

Sind x_1, x_2, x_3, x_4 die Wurzeln einer Gleichung, so muss der linke Theil derselben, wenn sie auf 0 gebracht ist, bekanntlich

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

sein. Daher folgt aus der Lösung der vorstehenden Gleichung die bekannte Zerlegung

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - x^4$$
$$= (a + b + x)(-a + b + x)(a - b + x)(a + b - x)$$

Setzt man diese Zerlegung voraus oder macht sie

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - x^4$$
$$= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - x^2)^2$$
$$= (2ab + a^2 + b^2 - x^2)(2ab - a^2 - b^2 + x^2)$$

u. s. w., so ergeben sich, wenn man jeden Factor $= 0$ setzt, wiederum sofort die obigen Wurzeln.

253. $\frac{a+x}{b+x} + \frac{c+x}{d+x} = \frac{a-x}{b-x} + \frac{c-x}{d-x}$

L. $x = 0, \infty, \sqrt{\frac{(a-b)d^2 + (c-d)b^2}{a-b+c-d}}$

Man vereinige zuerst je zwei ähnliche Glieder.

254. $\sqrt{\frac{a+x}{b+x}} + \sqrt{\frac{a-x}{b-x}} = 2\sqrt{\frac{a}{b}}$

L. $x = 0, \frac{b}{2}\sqrt{\frac{3a+b}{a}}$

255. $\sqrt{3a - 2b + 2x} - \sqrt{3a - 2b - 2x} = \frac{2x}{\sqrt{a}}$

L. $x = 0, \sqrt{2a(a - b)}$

Durch Fortschaffung der Wurzeln erhält man zunächst $x^4 - 2a(a - b)x^2 = 0$.

256. $\sqrt{a + b + x} - \sqrt{a + b - x} = \frac{x}{\sqrt{a}}$

L. $x = 0, 2\sqrt{ab}$

257. $\sqrt{2a + b + x} - \sqrt{2a + b - x} = \frac{x}{\sqrt{a+b}}$

L. $x = 0, 2\sqrt{a(a + b)}$

258. $a\sqrt{b^2 + x^2} + b\sqrt{a^2 + x^2} = (a + b)x$

L. $x = 0, \infty$

259. $a\sqrt{b^2+x^2}+b\sqrt{a^2+x^2}=2ab$

L. $x=0,\ \frac{2ab}{a^2-b^2}\sqrt{2(a^2+b^2)}$

260. $\sqrt{x^2+\frac{4a}{x}}-\sqrt{x^2-\frac{4b}{x}}=2x$

L. $x=\infty,\ \frac{a+b}{\sqrt[3]{2(a^2-b^2)}}$

---

261. $x^4-ax^2+b^2=0$

L. $x=\frac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{2}$

Um auf dem gewöhnlichen Wege diese Form der Lösung zu erhalten, muss man zu der in 171. b. angegebenen Formel seine Zuflucht nehmen, wenn man die Umformung nicht so übersieht. Die corr. Addition liefert diese Form direct. Man hat

$$\frac{x^4+b^2}{2bx}=\frac{a}{2b},\ \text{also}\ \frac{x^2+b}{x^2-b}=\sqrt{\frac{a+2b}{a-2b}}$$

$$\frac{x^2}{b}=\frac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}$$

Schafft man jetzt die Wurzeln aus dem Nenner fort, so giebt das

$$\frac{x^2}{b}=\frac{(\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b})^2}{4b}$$

$$x^2=\left(\frac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{2}\right)^2\ \text{u. s. w.}$$

Die Quadratwurzeln der Lösung können natürlich alle möglichen Zeichen haben, so dass 4 Werthe für x entstehen.

Diese Art der Auflösung kann in quadratischen Gleichungen für x^2, d. h. in Gleichungen von der Form $ax^4+bx^2+c=0$ nur dann ein einfaches Resultat liefern, wenn a und c Quadrate sind. Ist also $a=1$, so muss c ein Quadrat sein.

In den nächstfolgenden Aufgaben wird sich diese Art der Auflösung vielfach anwenden lassen. Complicirtere Gleichungen (z. B. 264., 266., 268.—271.) sind immer erst auf die Form 261. zu bringen.

262. $4x^4-4ax^2+b^2=0$

L. $x=\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{2}$

263. $x^4 - 4(a+b)\,x^2 + 16(a-b)^2 = 0$

L. $x = \sqrt{3a-b} + \sqrt{3b-a}$

Man hat hier zunächst $x^4 + 16(a-b)^2 = 4(a+b)\,x^2$. Jetzt ist auf beiden Seiten mit dem doppelten Product der Grössen zu dividiren, deren Quadratsumme links steht, d. h. mit $8(a-b)\,x^2$. Das giebt

$$\frac{x^4 + 16(a-b)^2}{8(a-b)\,x^2} = \frac{a+b}{2(a-b)}$$

$$\frac{x^2 + 4(a-b)}{x^2 - 4(a-b)} = \sqrt{\frac{3a-b}{3b-a}} \text{ u. s. w.}$$

264. $\dfrac{x^4 + (a-b)\,x^2 + (a-b)^2}{x^4 - (a-b)\,x^2 + (a-b)^2} = \dfrac{a}{b}$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3a-b} + \sqrt{3b-a}\right)$

265. $x^4 - 2(a+b)\,x^2 + 9(a-b)^2 = 0$

L. $x = \sqrt{2a-b} + \sqrt{2b-a}$

266. $\dfrac{x^4 + 2(a-b)\,x^2 + 9(a-b)^2}{x^4 - 2(a-b)\,x^2 + 9(a-b)^2} = \dfrac{a}{b}$

L. wie in 265.

Diese Gleichung ist nur eine andere Form der Gleichung 265.

267. $x^4 - 2(a^2 + 4ab - b^2)\,x^2 + (a-b)^4 = 0$

L. $x = \sqrt{a(a+b)} + \sqrt{b(3a-b)}$

Man hat nämlich

$$\frac{x^4 + (a-b)^4}{2(a-b)^2\,x^2} = \frac{a^2 + 4ab - b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$$

$$\frac{x^2 + (a-b)^2}{x^2 - (a-b)^2} = \sqrt{\frac{a(a+b)}{b(3a-b)}} \text{ u. s. w.}$$

268. $x^4 - 2(a^2 + b^2)\,x^2 + (a-b)^4 = 4ab^2(a-2b)$

L. $x = \sqrt{a(a-b)} + \sqrt{b(a+b)}$

Man hat hier zunächst $x^4 - 2(a^2+b^2)\,x^2 + (a^2 - 2ab - b^2)^2 = 0$, und dann weiter durch corr. Add. — Löst man in gewöhnlicher Weise, so erhält man

$$x^2 = a^2 + b^2 + 2\sqrt{ab(a^2 - b^2)} \text{ u. s. w.}$$

269. $a = x^2 + b + \dfrac{b^2}{x^2}$

L. $x = \dfrac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-3b}}{2}$

270. $x\sqrt{2a - 3x^2} + \sqrt{ab - 3x^4} = a$

L. $x = \dfrac{\sqrt{3a-b} + \sqrt{3b-a}}{4}$

Man schaffe die Wurzeln fort. Das giebt zunächst $16x^4 - 4(a+b)x^2 + (a-b)^2 = 0$.

271. $x = \sqrt{4a - 3x^2} - \frac{2b}{x}$

L. $x = \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-3b}}{2}$

Man kommt zunächst auf $x^4 - (a-b)x^2 + b^2 = 0$

272. $(x-a)^2 + \frac{1}{(x-a)^2} = m$

L. $x = \frac{1}{2}\left(2a + \sqrt{m+2} + \sqrt{m-2}\right)$

Man betrachte $x - a$ als die zu suchende Grösse. Dann hat man

$\frac{(x-a)^4 + 1}{2(x-a)^2} = \frac{m}{2}$, also $\frac{(x-a)^2 + 1}{(x-a)^2 - 1} = \sqrt{\frac{m+2}{m-2}}$ u. s. w.

273. $(x-a)^4 - (b+c)(x-a)^2 + (b-c)^2 = 0$

L. $x = a + \frac{1}{2}\sqrt{3b-c} + \frac{1}{2}\sqrt{3c-b}$

274. $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{a^2}{(x-a)^2} = \frac{c^2}{a^2}$

L. $x = \frac{1}{2}\left(2a + \sqrt{c^2 + 2a^2} + \sqrt{c^2 - 2a^2}\right)$

275. $4(x-a)^4 - 4b(x-a)^2 + c^2 = 0$

L. $x = \frac{1}{2}\left(2a + \sqrt{b+c} + \sqrt{b-c}\right)$

276. $\frac{x^4 + 1}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{a}{b}$

L. $x = \frac{\sqrt{2a-b} + \sqrt{b}}{\sqrt{2(a-b)}}$

Man kommt zunächst auf

$$(x^4 + 1)(a - b) - 2ax^2 = 0,$$

also $\frac{x^4 + 1}{2x^2} = \frac{a}{a-b}$

$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{2a-b}{b}}$ u. s. w.

277. $x^2 + \frac{1}{x^2} = a$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a+2} + \sqrt{a-2}\right)$

278. $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} = \frac{a}{b}$

L. $x = \frac{\sqrt{3a-b} + \sqrt{3b-a}}{2\sqrt{a-b}}$

279. $\dfrac{x^4+10x^2+1}{x^4-10x^2+1}=\dfrac{a}{b}$

L. $x=\dfrac{\sqrt{3a+2b}+\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{a-b}}$

280. $\dfrac{a+b+(a-b)\,x^2}{2x}=\dfrac{2x}{a-b+(a+b)\,x^2}$

L. $x=\dfrac{\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$

281. $\dfrac{(1+x^2)^2}{a^2}-\dfrac{(1-x^2)^2}{b^2}=4x^2$

L. $x=\dfrac{a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$

282. $a^2(1-x^2)^2-b^2(1+x^2)^2=4x^2$

L. $x=\dfrac{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$

283. $\sqrt[3]{\dfrac{a-x}{b+x}}+\sqrt[3]{\dfrac{b+x}{a-x}}=c$

L. $x=\dfrac{a-b}{2}+\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{c+1}{c-1}\sqrt{\dfrac{c-2}{c+2}}$ (vgl. 71.)

a. Kubirt man hier, so fallen die Wurzeln fort. Man erhält

$$\frac{a-x}{b+x}+3c+\frac{b+x}{a-x}=c^3$$

Sucht man hieraus x in der gewöhnlichen Weise, so giebt das nicht den einfachsten Radicanden. Um diesen zu erhalten, kann man ganz wie in 71. verfahren. Man kommt da durch Multiplication der entsprechenden Gleichungen auf

$$\frac{(a-x)-(b+x)}{(a-x)+(b+x)}=\frac{c+1}{c-1}\sqrt{\frac{c-2}{c+2}},$$

woraus x leicht zu entwickeln ist.

b. Da in der Gleichung nur die reziproken Grössen

$$\sqrt[3]{\frac{a-x}{b+x}} \text{ und } \sqrt[3]{\frac{b+x}{a-x}}$$

vorkommen, so kann man diese aus der Gleichung bestimmen und zwar nach 153. b. und 166. in einer symmetrischen Form. Man hat

(1) $$\sqrt[3]{\frac{a-x}{b+x}}=\frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c-2}}{\sqrt{c+2}+\sqrt{c-2}}$$

Jetzt kubirt man und wendet wieder corr. Addition an. Das giebt:

$$\frac{(b+x)-(a-x)}{(b+x)+(a-x)} = \frac{(\sqrt{c+2}+\sqrt{c-2})^3-(\sqrt{c+2}-\sqrt{c-2})^3}{(\sqrt{c+2}+\sqrt{c-2})^3+(\sqrt{c+2}-\sqrt{c-2})^3}$$

$$= \frac{3(c+2)+(c-2)}{(c+2)+3(c-2)}\sqrt{\frac{c-2}{c+2}}$$

$$\frac{2x-(a-b)}{a+b} = \frac{c+1}{c-1}\sqrt{\frac{c-2}{c+2}} \text{ u. s. w.}$$

Diese Auflösung ist schon etwas allgemeiner als die in a. angegebene. Sie ist für Gleichungen von obenstehender Form anwendbar mit Wurzeln jeglichen Grades, die in a. angegebene nur für Kubikwurzeln, wo sie freilich die einfachste ist.

c. Auch die in b. angegebene Methode ist bei Wurzeln höherer Grade weitläufiger als nöthig. Man würde sie auch schon nicht gut anwenden können, wenn das 2. Glied negativ wäre. Folgende Methode ist die allgemeinste und führt auch zugleich immer auf den einfachsten Radicanden.

Man sucht aus der gegebenen Gleichung den Ausdruck $\sqrt[3]{\frac{a-x}{b+x}}$, indem man sie nach 172. b. so schreibt:

$$(2) \qquad \left(\sqrt[3]{\frac{a-x}{b+x}}\right)^2 - c\sqrt[3]{\frac{a-x}{b+x}} + 1 = 0$$

Das giebt

$$(3) \qquad \sqrt[3]{\frac{a-x}{b+x}} = \frac{c+\sqrt{c^2-4}}{2}$$

Damit ist die Lösung schon fertig. Setzt man

$$(4) \qquad \left(\frac{c+\sqrt{c^2-2}}{2}\right)^3 = c_1$$

so erhält man aus (3)

$$(5) \qquad x = \frac{a-bc_1}{1+c_1}$$

Sind statt der Buchstaben Zahlen gegeben und gehen die Wurzeln über den 4. Grad hinaus, so ist diese Formel zur Berechnung von x die geeignetste.

d. In der Formel (5) kommen jedoch noch Wurzelgrössen im Nenner vor, da c_1 nach (4) eine Wurzelgrösse enthält. Wollte man diese in der gewöhnlichen Weise fortschaffen, so würde bei dieser und besonders bei mancher der folgenden Aufgaben die Rechnung umständlicher werden als nöthig ist.

In (3) ist der aus der quadratischen Gleichung (2) gefundene Werth für die Kubikwurzel angegeben. Man kann ebensogut schreiben:

(6) $$\sqrt[3]{\frac{a-x}{b+x}} = \frac{2}{c-\sqrt{c^2-4}}$$

Man hat demnach 2 Formeln für die Unbekannte aus der quadratischen Gleichung und allgemein den Satz:

Aus jeder quadratischen (Buchstaben-) Gleichung mit irrationalen Wurzeln ergeben sich zunächst immer zwei Formeln für die Unbekannte, eine, wo die Wurzelgrösse im Zähler, und eine, wo sie im Nenner steht.

In (3) steht die Grösse $\sqrt{c^2-4}$ im Zähler, in (6) steht sie im Nenner.

Hat man nun für eine Grösse X zwei Formeln gefunden

(7) $$X = \frac{A}{B} \text{ und } X = \frac{A_1}{B_1},$$

so kann man aus diesen beiden beliebig viele andere Formeln für dieselbe Grösse X ableiten. Erweitert man nämlich die Quotienten durch beliebige Factoren m und m_1 und addirt oder subtrahirt Zähler und Zähler, und Nenner und Nenner, so muss noch immer sein

(8) $$X = \frac{Am \pm A_1 m_1}{Bm \pm B_1 m_1}\text{*)}.$$

Dieser Satz dient oft dazu, verwickelte Ausdrücke zu vereinfachen und weitläufige Rechnungen zu vermeiden.

Wegen seiner vielfachen Anwendung in den folgenden Aufgaben soll der durch die Gleichung (8) angegebene, aus (7) folgende Satz kurz der **Correspondenzsatz** heissen. Dabei soll unterschieden werden: „den Correspondenzsatz mit Addition anwenden“, wenn man den Ausdruck $X = \frac{Am + A_1 m_1}{Bm + B_1 m_1}$, und: „den Correspondenzsatz mit Subtraction anwenden“, wenn man den Ausdruck $X = \frac{Am - A_1 m_1}{Bm - B_1 m_1}$ bildet.

So entsteht aus

$$X = \frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1}$$

direct nach dem Correspondenzsatz

---

*) Der Beweis folgt sofort, wenn man rechts in (8) aus (7) $A = BX$ und $A_1 = BX$ einsetzt.

$$X = \frac{A + A_1}{B + B_1} \text{ und } X = \frac{A - A_1}{B - B_1}$$

ersteres durch Addition, letzteres durch Subtraction.

Setzt man in (3) und (6) der Kürze halber $\sqrt{c^2 - 4} = r$ und kubirt, so hat man

$$\frac{a - x}{b + x} = \frac{(c + r)^3}{8} = \frac{8}{(c - r)^3}.$$

Hieraus durch corr. Addition

$$\frac{a - b - 2x}{a + b} = \frac{(c + r)^3 - 8}{(c + r)^3 + 8} = \frac{8 - (c - r)^3}{8 + (c - r)^3}$$

Hier sind für die Grösse $\frac{a - b - 2x}{a + b}$ zweierlei Ausdrücke gefunden. Soll nun kein r, d. h. keine Wurzel im Nenner vorkommen, so sind die beiden Ausdrücke nach dem Correspondenzsatze so zu verbinden, dass im Nenner nur noch r^2 bleibt. Man hat also direct den Correspondenzsatz mit Addition anzuwenden. Das giebt

$$\frac{a - b - 2x}{a + b} = \frac{(c + r)^3 - (c - r)^3}{(c + r)^3 + (c - r)^3 + 16} = \frac{(3c^2 + r^2)\, r}{c\,(c^2 + 3r^2) + 8}$$

Nun ist $r = \sqrt{c^2 - 4}$. Dies eingesetzt, erhält man nach einigen Reductionen das schon mehrmals gefundene Resultat

$$\frac{a - b - 2x}{a + b} = \pm \frac{c + 1}{c - 1} \sqrt{\frac{c - 2}{c + 2}}$$

Dieser Weg scheint sehr umständlich, ist aber in Wirklichkeit sehr einfach und zugleich sehr allgemein.

Der Correspondenzsatz und die corresp. Addition sind im Wesentlichen kaum von einander verschieden.

284. $\sqrt[3]{\frac{a - x}{b + x}} - \sqrt[3]{\frac{b + x}{a - x}} = c$

L. $x = \frac{a - b}{2} + \frac{a + b}{2} \cdot \frac{2 + (c^2 + 1)\sqrt{c^2 + 4}}{c^3 + 3c}$

Man verfahre nach 283. d. Man findet hier, wenn man $\sqrt{c^2 + 4} = r$ setzt,

$$\frac{a - b - 2x}{a + b} = \frac{(r + c)^3 - 8}{(r + c)^3 + 8} = \frac{8 - (r - c)^3}{8 + (r - c)^3}$$

Jetzt ist der Correspondenzsatz mit Subtraction anzuwenden, wenn das r im Nenner fortgehen soll. Das giebt

$$\frac{a - b - 2x}{a + b} = \frac{(r + c)^3 + (r - c)^3 - 16}{(r + c)^3 - (r - c)^3} \text{ u. s. w.}$$

285. $\frac{a-x}{b+x} - \frac{b+x}{a-x} = c$

L. $x = \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2c}\left(2 + \sqrt{c^2+4}\right)$

286. $\frac{a-x}{b-x} - \frac{b-x}{a-x} = c$

L. $x = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2c}\left(2 + \sqrt{c^2+4}\right)$

287. $\sqrt[4]{\frac{a-x}{b+x}} + \sqrt[4]{\frac{b+x}{a-x}} = c$

L. $x = \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c\sqrt{c^2-4}}{c^2-2}$

Bei dieser und der folgenden Aufgabe kommt man wohl am leichtesten durch Quadriren zum Ziele.

288. $\sqrt[4]{\frac{a-x}{b-x}} - \sqrt[4]{\frac{b-x}{a-x}} = c$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2c} \cdot \frac{c^2+2}{\sqrt{c^2+4}}$

289. $\sqrt[5]{\frac{a-x}{b+x}} + \sqrt[5]{\frac{b+x}{a-x}} = c$

L. $x = \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c^2+c-1}{c^2-c-1} \cdot \sqrt{\frac{c-2}{c+2}}$

Hier ist das in 283. b. angegebene Verfahren wohl das kürzeste. Man hat dann

$$\sqrt[5]{\frac{a-x}{b+x}} = \frac{\sqrt{c+2} + \sqrt{c-2}}{\sqrt{c+2} - \sqrt{c-2}}$$

Jetzt zur 5. Potenz erhoben und corr. Add. angewendet,

$$\frac{a-b-2x}{a+b} = \frac{(m+n)^5 - (m-n)^5}{(m+n)^5 + (m-n)^5} = \frac{5m^4 + 10m^2n^2 + n^4}{m^4 + 10m^2n^2 + 5n^4} \cdot \frac{n}{m},$$

wo der Kürze wegen $\sqrt{c+2} = m$, $\sqrt{c-2} = n$ gesetzt ist.

290. $\sqrt[5]{\frac{a-x}{b+x}} - \sqrt[5]{\frac{b+x}{a-x}} = c$

L. $x = \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2 + (c^4+3c^2+1)\sqrt{c^2+4}}{c^5+5c^3+5c}$

Hier schlage man den in 283. d. angegebenen Weg ein. Nach 283. c. würde man, wenn man der Kürze wegen

$$\left(\frac{c+\sqrt{c^2+4}}{2}\right)^5 = c_1$$

setzt, erhalten

$$x = \frac{a - bc_1}{1 + c_1}$$

291. $\sqrt[6]{\frac{a-x}{b+x}} + \sqrt[6]{\frac{b+x}{a-x}} = c$

L. $x = \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c^2-1}{c^3-3c}\sqrt{c^2-4}$

292. $\left(\frac{a-x}{b+x}\right)^2 + \left(\frac{b+x}{a-x}\right)^2 = c$

L. $x = \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2} \cdot \frac{-2+\sqrt{c+2}}{\sqrt{c-2}}$

Man addire auf beiden Seiten 2 und ziehe die Wurzel, so kommt

$$\frac{a-x}{b+x} + \frac{b+x}{a-x} = \sqrt{c+2}$$

Ebenso durch Subtraction von 2

$$\frac{a-x}{b+x} - \frac{b+x}{a-x} = \sqrt{c-2}$$

Aus der Addition dieser Gleichungen folgt:

$$\frac{a-x}{b+x} = \frac{\sqrt{c+2}+\sqrt{c-2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{c+2}-\sqrt{c-2}}$$

Hieraus durch corr. Add.

$$\frac{a-b-2x}{a+b} = \frac{\sqrt{c+2}+\sqrt{c-2}-2}{\sqrt{c+2}+\sqrt{c-2}+2} = \frac{2-\sqrt{c+2}+\sqrt{c-2}}{2+\sqrt{c+2}-\sqrt{c-2}}$$

Also nach dem Correspondenzsatz durch Addition

$$\frac{a-b-2x}{a+b} = \frac{\sqrt{c+2}-2}{\sqrt{c-2}} \text{ u. s. w.}$$

Die Wurzelgrössen $\sqrt{c+2}$ und $\sqrt{c-2}$ können mit allen möglichen Zeichen genommen werden. Die gegebene Gleichung hat demnach 4 Wurzeln. — Für $c = \frac{17}{4}$ erhält man

$x_1 = 2a+b$, $x_2 = \frac{1}{3}(2a-b)$, $x_3 = \frac{1}{3}(a-2b)$, $x_4 = -(a+2b)$.

293. $\sqrt[3]{\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{x-b}{a-x}\right)^2} = c$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \frac{2+(c-1)\sqrt{c+2}}{(c+1)\sqrt{c-2}}$

Um die angegebene Form des Resultats zu erhalten, muss man nach 283. b. und d. verfahren. Man hat

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2} = \frac{\sqrt{c+2}+\sqrt{c-2}}{\sqrt{c+2}-\sqrt{c-2}} = \frac{(\sqrt{c+2}+\sqrt{c-2})^2}{4}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a-x}{x-b}} = \frac{\sqrt{c+2}+\sqrt{c-2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{c+2}-\sqrt{c-2}}$$

$$\frac{a-x}{x-b} = \left(\frac{\sqrt{c+2}+\sqrt{c-2}}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{c+2}-\sqrt{c-2}}\right)^3$$

$$\frac{a+b-2x}{a-b} = \text{u. s. w.}$$

Dann ist der Correspondenzsatz mit Addition anzuwenden. Das giebt schliesslich

$$\frac{a+b-2x}{a-b} = \frac{(c-1)\sqrt{c+2}-2}{(c+1)\sqrt{c-2}}$$

Die Gleichung hat, wie die vorige, 4 Wurzeln. Setzt man $c = \frac{17}{4}$, so erhält man die 4 Wurzeln

$$\frac{8a+b}{9}, \frac{a+8b}{9}, \frac{8a-b}{7}, \frac{8b-a}{7}.$$

---

294. $\frac{ax+b}{a+bx} + \frac{cx+d}{c+dx} = \frac{ax-b}{a-bx} + \frac{cx-d}{c-dx}$

L. $x = \pm 1, \sqrt{\frac{ac}{bd}}$

Man ziehe je zwei ähnliche Glieder zusammen, so giebt das

$$\frac{2ab(1-x^2)}{a^2-b^2x^2} + \frac{2cd(1-x^2)}{c^2-d^2x^2} = 0,$$

welche Gleichung durch Zerlegung leicht weiter zu lösen ist.

295. $(x+1)(x+3)(x-4)(x-7)$
$+ (x-1)(x-3)(x+4)(x+7) = 96$

L. $x = \pm 2, \pm 3$

Bei der Entwickelung ist das bei 1. Gesagte zu beachten.

296. $(x-1)(x+3)(x-5)(x+9)$
$+ (x+1)(x-3)(x+5)(x-9) + 18 = 0$

L. $x = \pm 2, \pm 6$

297. $(2x+1)(2-x)(3x+2)(3-2x)(1+x)$
$+ (2x-1)(2+x)(3x-2)(3+2x)(1-x) = 30$

L. $x = \pm 1, \frac{1}{4}\sqrt{3}, \infty$ (cf. 298.)

Die entwickelte und geordnete Gleichung wird

$$16x^4 - 19x^2 + 3 = 0$$

d. h. $(x^2-1)(16x^2-3) = 0$ u. s. w.

298. $\frac{11+x}{7+x} + \frac{5+x}{3+x} + \frac{2+x}{1+x} = \frac{11-x}{7-x} + \frac{5-x}{3-x} + \frac{2-x}{1-x}$

L. $x = 0, \infty, \pm 5, \sqrt{\frac{23}{7}}$

Man hat zuerst die entsprechenden Glieder zu vereinigen und dann gleichnamig zu machen. Die Wurzel ∞ kommt, weil die höchsten Potenzen von x fortfallen.

299. $x\sqrt{x-a}+a\sqrt{x+a}=\sqrt{x^3+a^3}$

L. $x=0, \infty, a, -\frac{5}{3}a$

300. $\sqrt{x^2-2ax+b^2}=\sqrt{(x+b)(b-a)}-\sqrt{(x-a)(b-x)}$

L. $x=a, b, a\pm\sqrt{a^2-b^2}$

Man bringe das 3. Glied nach links und quadrire, so lässt sich die entstehende Gleichung leicht zerlegen.

301. $\sqrt{x-1}-\sqrt{a-1}=\frac{x-a}{\sqrt{ax}}$

L. $x=a, \frac{a}{a-1}$

Schafft man die Wurzeln fort, so erhält man

$$(a-1)^2x^4-2a^2(a-1)(x-1)x^2+a^4(x-1)^2=0$$

Links kann man die Wurzel ziehen. Es bleibt also nur noch zu lösen

$$(a-1)x^2-a^2(x-1)=0$$

Man kann auch die Gleichung des 4. Grades vermeiden. Quadrirt man, so giebt das zunächst

$$ax^2+a^2x-x^2-a^2-2ax\sqrt{(a-1)(x-1)}=0$$

$$x^2(a-1)-2ax\sqrt{(a-1)(x-1)}-a^2(x-1)=0$$

Links die Wurzel gezogen,

$$x\sqrt{a-1}-a\sqrt{x-1}=0 \text{ u. s. w.}$$

302. $\sqrt{x(a+x)}-\sqrt{x(a-x)}=\frac{2x^2}{\sqrt{a(a+2x)}}$

L. $x=0, \frac{1}{2}a\sqrt{2}$

Man quadrire, isolire die noch bleibende Wurzel und quadrire wieder, so giebt das

$$4x^4-4a^2x^2+a^4=0$$

$$\text{d. h. } 2x^2-a^2=0 \text{ u. s. w.}$$

Oder man setze

$$\sqrt{x(a+x)}+\sqrt{x(a-x)}=t,$$

einer neuen Unbekannten. Diese Gleichung mit der gegebenen multiplicirt, kommt

$$t=\sqrt{a(a+2x)}$$

Man hat demnach statt der gegebenen Gleichung folgende zu lösen

$$\sqrt{x\,(a+x)} + \sqrt{x\,(a-x)} = \sqrt{a\,(a+2x)},$$

was offenbar einfacher ist.

Diese hier angewendete Methode, zunächst die Differenz der in der Gleichung vorkommenden Wurzelgrössen zu suchen, erspart oft weitläufige Rechnungen.

303. $\sqrt{x-2} + \sqrt{x} = \sqrt{x^2-1}$

L. $x = 1 \pm \sqrt{2}$

Man quadrire, bringe auf 0 und ziehe die Wurzel, so kommt $\sqrt{x^2-2x} - 1 = 0$.

304. $\sqrt{\frac{a}{x}-1} + \sqrt{\frac{x}{a}+1} = \sqrt{\frac{2a}{x}}$

L. $x = \pm a,\ a\,(-2 \pm \sqrt{5})$

Man quadrire, so erhält man

$$4ax\,(a^2-x^2) = (a^2-x^2)^2,$$

welche Gleichung sich leicht weiter durch Zerlegung lösen lässt.

305. $\sqrt{2a^2+ax} - \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{ax}$

L. $x = a\,(-1 \pm \sqrt{2})$

Nach Fortschaffung aller Wurzeln kommt man schliesslich auf

$$(x^2+2ax-a^2)^2 = 0.$$

Bringt man die 2. Wurzel nach rechts, quadrirt und bringt auf 0, so giebt das

$$\left[\sqrt{a\,(a-x)} - \sqrt{x\,(a+x)}\right]^2 = 0$$

306. $\sqrt{\frac{x+a}{a}} - \sqrt{\frac{x-a}{x}} = \sqrt{2\left(1-\frac{a}{x}\right)}$

L. $x = a\,(1 \pm \sqrt{2})$

Man quadrire und bringe auf 0, so kommt

$$\left[\sqrt{x\,(x-a)} - \sqrt{a\,(x+a)}\right]^2 = 0$$

307. $\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\left(b+\sqrt{b^2-1}\right) = x + \sqrt{x^2-1}$

L. $x = ab + \sqrt{(a^2-1)\,(b^2-1)}$

Der einfachste Weg zur Lösung zu gelangen, ist, beide Seiten der Gleichung in 1 zu dividiren. Da nämlich

$$\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}} = a-\sqrt{a^2-1}$$ u. s. w.

ist, so erhält man

(1) $$\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)\left(b-\sqrt{b^2-1}\right) = x-\sqrt{x^2-1}$$

Diese Gleichung zur gegebenen addirt, liefert sofort die Unbekannte.

Allgemeiner kann man auch hier den in 302. angegebenen Weg einschlagen. Man setzt

(2) $$\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)\left(b-\sqrt{b^2-1}\right) = t$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit der gegebenen, so giebt das

$$1 = t\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$t = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = x-\sqrt{x^2-1}$$

Daher geht die Gleichung (2) in die Gleichung (1) über u. s. w. —

Subtrahirt man (1) von der gegebenen Gleichung, so erhält man

$$a\sqrt{b^2-1}+b\sqrt{a^2-1} = \sqrt{x^2-1}$$

$$x^2-\left(a\sqrt{b^2-1}+b\sqrt{a^2-1}\right)^2 = 1$$

Setzt man hierin für x den gefundenen Werth, so muss immer sein

$$\left(ab+\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}\right)^2-\left(a\sqrt{b^2-1}+b\sqrt{a^2-1}\right)^2 = 1,$$

wie sich leicht ergiebt.

308. $$\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\left(b+\sqrt{b^2+1}\right) = x+\sqrt{x^2-1}$$

L. $x = a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2-1}$

Man findet hier zunächst

$$\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)\left(-b+\sqrt{b^2+1}\right) = x-\sqrt{x^2-1}$$

309. $$\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\left(b+\sqrt{b^2-1}\right)\left(c+\sqrt{c^2-1}\right)$$
$$= x+\sqrt{x^2-1}$$

L. $x = abc+a\sqrt{(b^2-1)(c^2-1)}+b\sqrt{(a^2-1)(c^2-1)}$
$$+c\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}$$

310. $$\frac{\sqrt{a+2x}+\sqrt{a-2x}}{\sqrt{a+2x}-\sqrt{a-2x}} = \frac{mx^2}{a}\cdot\frac{\sqrt{mx+2}+\sqrt{mx-2}}{\sqrt{mx+2}-\sqrt{mx-2}}$$

L. $x = \pm\sqrt{\frac{a}{m}}, \pm\sqrt{-\frac{a}{m}}$

Man schaffe die Wurzeln aus den Zählern fort, so erhält man

$$\frac{a}{a-\sqrt{a^2-4x^2}} = \frac{mx}{mx-\sqrt{m^2x^2-4}}$$

Macht man gleichnamig, schafft die Wurzeln fort, so kommt man schliesslich auf

$$m^2 x^4 = a^2$$

311. $\sqrt{(a+x)(x-b)} + \sqrt{(a-x)(x+b)} = \sqrt{(a+x)(x+b)} - \sqrt{(a-x)(x-b)}$

L. $x = \frac{\sqrt{a(a+2b)} + \sqrt{a(a-2b)}}{2}$

Nach Fortschaffung der Wurzeln kommt man schliesslich auf $x^4 - a^2x^2 + a^2b^2 = 0$, welche Gleichung weiter zu lösen ist nach 261 ff.

---

312. $a\sqrt{x^2+1} - \sqrt{c^2(x^2+1) - b^2} = bx$

L. $x = \frac{a^2+b^2-c^2}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$

Ausserdem kommt noch $x = \sqrt{-1}$. — Man bringe das 2. Glied nach rechts und quadrire, so giebt das eine Gleichung, die durch Zerlegung weiter zu lösen ist.

Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks, so ist x gleich der Cotangente des der Seite c gegenüberliegenden Winkels. Denn einerseits folgt aus der Lösung, wenn $\triangle$ den Inhalt des Dreiecks bedeutet,

$$(1) \qquad x = \frac{a^2+b^2-c^2}{4\triangle}$$

Andererseits hat man

$$\begin{aligned} 2ab\cos\gamma &= a^2+b^2-c^2 \\ 2ab\sin\gamma &= 4\triangle \end{aligned}$$

$$\text{also} \qquad \cot\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{4\triangle};$$

$$\text{mithin} \quad x = \cot\gamma$$

313. $ax = \sqrt{b^2x^2 - a^2} + \sqrt{c^2x^2 - a^2}$

L. $x = \frac{2a^2}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$

Dazu kommt noch $x = 0$. — Sind a, b, c die Seiten eines Dreiecks und die ihnen gegenüberstehenden Winkel resp. α, β, γ, so ist

$$x = \cot\beta + \cot\gamma$$

Nach der vorigen Aufgabe hat man nämlich

$$\cot\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{4\triangle}, \quad \cot\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{4\triangle}$$

Die Addition dieser Gleichungen giebt die Behauptung.

314. $\sqrt{x^2 - a^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - a^2 - c^2} + \sqrt{x^2 - b^2 - c^2} = x$

L. $x = \pm \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right)$

Sind a, b und c drei gerade Linien, so ist x die halbe Summe der drei vierten Proportionalen zu denselben.

315. $\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - c^2} = x$

L. $x = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{2\sqrt{2(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}}$

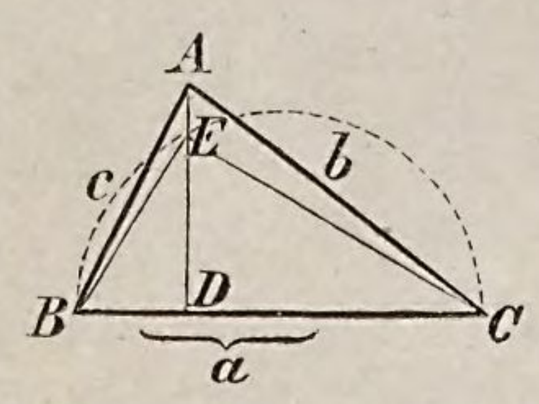
Auch hier kann man x geometrisch deuten, wenn a, b und c die Seiten eines Dreiecks sind. Construirt man nämlich a_1, b_1 und c_1 so, dass

(1) $$a_1^2 = \tfrac{1}{2}(-a^2 + b^2 + c^2) \quad b_1^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2)$$
$$c_1^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2),$$

so ist x gleich der halben Summe der drei vierten Proportionalen zu den Linien a_1, b_1 und c_1, d. h.

(2) $$x = \pm \tfrac{1}{2}\left(\frac{b_1 c_1}{a_1} + \frac{a_1 c_1}{b_1} + \frac{a_1 b_1}{c_1}\right)$$

Die 3 Linien a_1, b_1, c_1 sind leicht zu construiren. Man schlage über jeder Seite des Dreiecks als Durchmesser einen Kreis und ziehe von den Ecken des Dreiecks nach den Punkten, wo die Kreise die Höhen des Dreiecks schneiden, gerade Linien, so sind dies die Linien a_1, b_1, c_1. Man erhält so im Ganzen 6 Linien; von diesen sind aber je zwei einander gleich.



In dem Dreieck ABC sind BE und CE zwei solche Linien. Im rechtwinkligen Dreieck BCE ist

$$BE^2 = a \cdot BD = a \cdot c \cos\beta$$
$$= \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2),$$

mithin $BE = b_1$. Ebenso würde $CE = c_1$ sein.

Die Richtigkeit der Gleichung (2) folgt, wenn man aus (1) in (2) substituirt.

Die Linie x hat zum Inhalte des Dreiecks eine eigenthümliche Beziehung. Man hat die bekannten Formeln

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = 16\,\Delta^2$$
$$-a^2 + b^2 + c^2 = 2bc\cos\alpha, \quad a^2 - b^2 + c^2 = 2ac\cos\beta,$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos\gamma.$$

Dies in die Lösung eingesetzt, giebt

(3) $$x^2 = \frac{4\,\Delta^4}{a^2b^2c^2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}$$

Aus den bekannten Formeln für den Inhalt des Dreiecks

$$\triangle = \tfrac{1}{2} bc \sin\alpha,\ \triangle = \tfrac{1}{2} ac \sin\beta,\ \triangle = \tfrac{1}{2} ab \sin\gamma$$

folgt durch Multiplication die symmetrische Formel

$$\triangle^3 = \tfrac{1}{8} a^2 b^2 c^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

Diese Gleichung mit (3) multiplicirt, liefert

$$x^2 = \tfrac{1}{2} \triangle \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$$

$$\triangle = 2x^2 \cot\alpha \cdot \cot\beta \cdot \cot\gamma$$

316. $\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{x^2}}$

L. $x = \dfrac{2abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$

Sind a, b, c wiederum die Seiten eines Dreiecks, so ist x der Durchmesser des umschriebenen Kreises. — Ist nämlich der Durchmesser $= d$, so hat man, da der Nenner der Lösung $4\triangle$ ist, und bekanntlich die Formel $abc = 2d\triangle$ gilt,

$$x = \frac{2 \cdot 2d\triangle}{4\triangle} = d.$$

Man kann das auch direct ableiten. Die Formel

(1) $$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$$

ist bekannt. Es gilt somit auch

(2) $$\cot\alpha \cdot \cot\beta + \cot\alpha \cdot \cot\gamma + \cot\beta \cdot \cot\gamma = 1$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit 2, addirt auf beiden Seiten

$$\cot\alpha^2 + \cot\beta^2 + \cot\gamma^2$$

und radicirt, so giebt das

(3) $$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \sqrt{\cot\alpha^2 + \cot\beta^2 + \cot\gamma^2 + 2}$$

Nun ist bekanntlich

$$\sin\alpha = \frac{a}{d},\ \sin\beta = \frac{b}{d},\ \sin\gamma = \frac{c}{d},$$

also auch

$$\cot\alpha = d\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{d^2}} \quad \cot\beta = d\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{d^2}} \quad \cot\gamma = d\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2}}$$

$$\cot\alpha^2 + \cot\beta^2 + \cot\gamma^2 + 2 = d^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2}\right)$$

Dies in (3) eingesetzt, giebt die oben stehende Gleichung für $d = x$.

317. $a\sqrt{(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)} + b\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - c^2)}$
$+ c\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)} = abc$

L. wie in 316.

Diese Gleichung ist von der vorhergehenden nicht verschieden, wenigstens nur der Form nach. Wenn man in 316. gleichnamig macht und quadrirt, so erhält man 317. — Man kann 317. auch direct aus 316. (2) ableiten, wenn man für die Cotangenten ihre Werthe durch die Seiten setzt

$$\cot\alpha = \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \text{ u. s. w.}$$

Wie in dieser und in der vorigen Gleichung x auf algebraischem Wege gefunden ist, so konnte es auch auf geometrischem Wege gefunden werden. Gleichungen, die ausser der Unbekannten nur noch die Grössen a, b und c enthalten, lassen häufig eine Beziehung auf das Dreieck zu, und bisweilen ist sogar die geometrische Lösung leicht, wo die algebraische auf Schwierigkeiten stösst. Es sei z. B. gegeben

$$(1)\quad a\sqrt{x^2 - a^2} + b\sqrt{x^2 - b^2} + c\sqrt{x^2 - c^2} = \frac{2abc}{x}$$

Schafft man die Wurzeln fort, so wird die Rechnung sehr weitläufig. Eine einfache geometrische Betrachtung zeigt, dass in diesem Falle x der Durchmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises ist, oder doch sein kann. Denn

$$a\sqrt{x^2 - a^2} \quad b\sqrt{x^2 - b^2} \quad c\sqrt{x^2 - c^2}$$

sind die 4fachen Dreiecke, welche von je einer Seite und zwei Radien gebildet werden, und $\frac{2abc}{x}$ ist der 4fache Inhalt des ganzen Dreiecks. Daher giebt x als Durchmesser des umschriebenen Kreises eines Dreiecks, dessen Seiten a, b, c sind, eine Lösung der Gleichung (1), und es muss nach 316. und 317. mithin

$$(2)\quad x = \frac{2abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}} = \frac{abc}{2\Delta}$$

eine Lösung der Gleichung (1) sein. — Dass diese Lösung genügt, ist leicht nachzuweisen. Man hat nämlich aus (2)

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{a(-a^2 + b^2 + c^2)}{4\Delta},\quad \sqrt{x^2 - b^2} = \frac{b(a^2 - b^2 + c^2)}{4\Delta},$$

$$\sqrt{x^2 - c^2} = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{4\Delta}$$

Dies in (1) eingesetzt, kommt

$$a^2(-a^2 + b^2 + c^2) + b^2(a^2 - b^2 + c^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2) = 16\Delta^2,$$

eine identische Gleichung.

318. $\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}+\sqrt{(a^2-x^2)(c^2-x^2)}$
$+\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}=x^2$

L. $x=\frac{1}{2}abc\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)}$

Auch diese Gleichung mit ihrer Lösung lässt eine geometrische Deutung zu. Sie ist folgende:

Man construire aus a, b, c ein Dreieck, aus den Höhen dieses Dreiecks ein zweites und aus den Höhen dieses zweiten ein drittes, so ist x der Durchmesser des um das dritte Dreieck beschriebenen Kreises.

Sind nämlich die Seiten der drei genannten Dreiecke resp.

$$a\,b\,c \quad a_1\,b_1\,c_1 \quad a_2\,b_2\,c_2$$

und also ihre Höhen entsprechend

$$a_1\,b_1\,c_1 \quad a_2\,b_2\,c_2 \quad a_3\,b_3\,c_3$$

und ihre Inhalte bezüglich

$$\triangle \quad \triangle_1 \quad \triangle_2$$

und der Durchmesser des um das erste Dreieck beschriebenen Kreises $= d$, so hat man die Gleichungen

$$(1) \qquad a\,a_1 = b\,b_1 = c\,c_1 = 2\,\triangle$$

$$(2) \qquad a_1\,a_2 = b_1\,b_2 = c_1\,c_2 = 2\,\triangle_1$$

$$(3) \qquad d = \frac{a\,b\,c}{2\,\triangle}$$

Aus (1) folgt

$$\frac{1}{a} = \frac{a_1}{2\,\triangle}, \quad \frac{1}{b} = \frac{b_1}{2\,\triangle}, \quad \frac{1}{c} = \frac{c_1}{2\,\triangle}$$

Dies in die Lösung eingesetzt und beachtet, dass

$$\sqrt{(a_1+b_1+c_1)(-a_1+b_1+c_1)(a_1-b_1+c_1)(a_1+b_1-c_1)} = 4\,\triangle_1$$

sein muss, erhält man

$$x = \frac{a\,b\,c\cdot\triangle_1}{2\,\triangle^2}$$

Diese Gleichung durch (3) dividirt, giebt mit Berücksichtigung von (1) und (2) leicht

$$\frac{x}{d} = \frac{\triangle_1}{\triangle} = \frac{a_2}{a} = \frac{b_2}{b} = \frac{c_2}{c}$$

Hieraus sieht man, dass x zu $a_2\,b_2\,c_2$ dieselbe Beziehung haben muss, wie d zu $a\,b\,c$, womit die Richtigkeit der geometrischen Deutung nachgewiesen ist.

319. $$\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}}=\frac{c}{\sqrt{(a-x)\,(b-x)}}$$

L. $$x=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b+2c}{2}\sqrt{\frac{a-b}{a-b+4c}}$$

a. Man schafft alle Wurzeln fort, indem man mit den Nennern heraufmultiplicirt, die Glieder mit $\sqrt{a-x}$ zusammenzieht und ebenso die mit $\sqrt{b-x}$ und dann quadrirt. Das giebt

$$(a+c-x)^2\,(b-x)=(c-b+x)^2\,(a-x),$$

wovon nach der Entwickelung bleibt

$$x^2-(a+b)\,x+ab=\frac{(a-b)\,c^2}{a-b+4c}$$

Diese Gleichung ist in der gewöhnlichen Weise weiter zu lösen.

b. Man suche durch corr. Addition zu lösen, indem man die identische Gleichung

(1) $$\sqrt{(a-x)^2}-\sqrt{(b-x)^2}=a-b$$

benutzt. Dividirt man diese Gleichung in die gegebene, hebt durch $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}$ und geht mit der Wurzelgrösse $\sqrt{(a-x)\,(b-x)}$ nach links, so giebt das

(2) $$\frac{\sqrt{(a-x)\,(b-x)}}{(\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x})^2}=\frac{c}{a-b}$$

Hieraus nach 18. 10, indem man $\sqrt{a-x}=u$ und $\sqrt{b-x}=v$ gesetzt denkt,

(3) $$\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}}=\sqrt{\frac{a-b+4c}{a-b}}$$

Jetzt wieder corr. Add. angewendet, quadrirt und nochmals corr. Addition angewendet, kommt

$$\frac{a+b-2x}{}=\frac{(a-b+4c)+(a-b)}{2\sqrt{(a-b)\,(a-b+4c)}}$$ u. s. w.

Die Gleichung (3) kann man auch dadurch erhalten, dass man links im Zähler die Wurzeln fortschafft in den Nenner. Das giebt

$$\frac{a-b}{(\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x})^2}=\frac{c}{\sqrt{(a-x)\,(x-b)}}$$ u. s. w.

c. Noch einfacher kehrt man die Gleichung (2) um und findet, indem man das Quadrat entwickelt, daraus zunächst

$$\frac{(a-x)+(b-x)}{\sqrt{(a-x)\,(b-x)}}=\frac{a-b+2c}{c}$$

Daraus nach 18. 16.

$$\frac{(a-x)+(b-x)}{(a-x)-(b-x)} = \frac{a-b+2c}{\sqrt{(a-b+2c)^2-4c^2}} \text{ u. s. w.}$$

d. Eine allgemeinere Methode der Auflösung für Gleichungen dieser Art ist, dass man solche neue Unbekannte einführt, durch welche die Gleichung von den Wurzelgrössen frei wird. Das erleichtert die Uebersicht. Hier hat man zu setzen

$$(4) \qquad \sqrt{a-x} = u \qquad \sqrt{b-x} = v$$

Dann folgen aus der gegebenen Gleichung und aus (4) die beiden Gleichungen

$$(5) \qquad \left[\begin{array}{c} \frac{u+v}{u-v} = \frac{c}{uv} \\ u^2 - v^2 = a - b \end{array}\right]$$

Hieraus sind u und v zu bestimmen. Man sucht zunächst uv und daraus $u^2 + v^2$. Durch Multiplication und Division folgen aus (5)

$$(6) \qquad \left[\begin{array}{l} (u+v)^2 = \frac{(a-b)\,c}{uv} \\ (u-v)^2 = \frac{(a-b)\,uv}{c} \end{array}\right]$$

Die Subtraction dieser Gleichungen liefert

$$(7) \qquad \frac{4uv}{a-b} = \frac{c}{uv} - \frac{uv}{c}$$

$$uv = c\sqrt{\frac{a-b}{a-b+4c}}$$

Die Addition der Gleichungen (6) liefert daher

$$u^2 + v^2 = \tfrac{1}{2}(a-b)\left(\frac{c}{uv} + \frac{uv}{c}\right) = (a-b+2c)\sqrt{\frac{a-b}{a-b+4c}},$$

d. h. wegen (4)

$$a + b - 2x = (a-b+2c)\sqrt{\frac{a-b}{a-b+4c}}$$

Statt der in (4) gemachten Substitution hätte man auch die Substitution

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{a-x} = u + v \\ \sqrt{b-x} = u - v \end{array}\right]$$

machen können und würde dadurch bei den meisten Aufgaben schneller und leichter zum Ziele kommen. Da jedoch auch diese Substitution auf Gleichungen mit 2 Unbekannten führt und diese Methode der Auflösung sich nicht wesentlich von der folgenden unterscheidet, so ist sie nicht weiter berücksichtigt.

e. Man setze

(8) $\sqrt{a-x} = (1+t)\,\lambda \qquad \sqrt{b-x} = (1-t)\,\lambda.$

Aus dieser Substitution folgt

$$a-b = 4t\lambda^2 \qquad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{4t}{a-b}$$

und die gegebene Gleichung geht somit über in

$$\frac{1}{t} = \frac{c \cdot 4t}{(1-t^2)\,(a-b)}$$

Das giebt

(9) $$t = \sqrt{\frac{a-b}{a-b+4c}}$$

Aus (8) hat man

$$\sqrt{\frac{a-x}{b-x}} = \frac{1+t}{1-t}$$

Dies quadrirt und corr. Add. angewendet, kommt

$$\frac{a+b-2x}{a-b} = \frac{1+t^2}{2t} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+t\right)$$

Hierin für t aus (9) den Werth gesetzt, giebt

$$\frac{a+b-2x}{a-b} = \frac{a-b+2c}{\sqrt{(a-b)\,(a-b+4c)}} \text{ u. s. w.}$$

320. $$\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}} = \frac{c}{a+b-2x}$$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{c}{2}\sqrt{\frac{a-b}{2c-a+b}}$

Der einfachste Weg ist hier wohl der in 319. e. angegebene. Auch der in 319. c. ist sehr kurz. Man hat mit Benutzung von

$$\sqrt{(x-a)^2} - \sqrt{(x-b)^2} = -(a-b)$$

aus der gegebenen Gleichung

$$\frac{(x-a)+(x-b)}{(\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b})^2} = \frac{c}{a-b}$$

Hieraus durch corr. Add.

$$\frac{(x-a)+(x-b)}{2\sqrt{(x-a)\,(x-b)}} = \frac{c}{c-(a-b)}$$

Mithin nach 18. 16.

$$\frac{(x-a)+(x-b)}{(x-a)-(x-b)} = \frac{c}{\sqrt{c^2-(c-a+b)^2}} \text{ u. s. w.}$$

321. $$\frac{(a-x)\sqrt{a-x}+(b-x)\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}} = c$$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{2c-a+b}{2}\sqrt{\frac{a-b}{4c-3\,(a-b)}}$

Nach dem in 319. c. angegebenen Wege würde man hier kommen auf

$$\frac{\sqrt{(a-x)^2} - \sqrt{(a-x)(b-x)} + \sqrt{(b-x)^2}}{(\sqrt{a-x} - \sqrt{b-x})^2} = \frac{c}{a-b}$$

$$\frac{(a-x)+(b-x)}{\sqrt{(a-x)(b-x)}} = \frac{2c-a+b}{c-a+b} \text{ u. s. w.}$$

322. $\dfrac{(\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x})^3}{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}} = c$

L. $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b+c}{4}\sqrt{\dfrac{a-b}{c}}$

323. $(a-x)\sqrt{\dfrac{a-x}{b-x}} - (b-x)\sqrt{\dfrac{b-x}{a-x}} = c$

L. $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{(a-b)\,c}{2\sqrt{c^2-4(a-b)^2}}$

324. $\left((a-x)\sqrt{a-x} + (x-b)\sqrt{x-b}\right)\left(\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}\right)$
$= (a-b)^2$

L. $x = a,\ b,\ \dfrac{a+b}{2}$

Man führe die Multiplication aus. Das giebt leicht

$$(a-b)\sqrt{(a-x)(x-b)} = 2(a-x)(x-b)$$

325. $(a-x)\sqrt{\dfrac{a-x}{x-b}} + (x-b)\sqrt{\dfrac{x-b}{a-x}} = a-b$

L. $x = \dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a+b}{2} \pm \dfrac{a-b}{2}\sqrt{-3}$

Die einfachste Auflösung ist hier wohl die in 319. e. angegebene. Man setzt also

$$\sqrt{a-x} = (1+t)\,\lambda \qquad \sqrt{x-b} = (1-t)\,\lambda$$

Da findet man schliesslich für t die Werthe 0 und $\sqrt{-3}$. Demnach wird man weiter zu lösen haben

1. $\sqrt{\dfrac{a-x}{x-b}} = 1$ 2. $\sqrt{\dfrac{a-x}{x-b}} = \dfrac{1+\sqrt{-3}}{1-\sqrt{-3}}$

326. $\dfrac{(\sqrt{7-x}-\sqrt{x-3})^2}{\sqrt{7-x}+\sqrt{x-3}} = 2$

L. $x = 7,\ 3,\ 5+4\sqrt{-2}$

327. $\dfrac{(a-x)^2\sqrt{a-x}+(x-b)^2\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}} = (a-b)^2$

L. $x = a,\ b,\ \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}\sqrt{-3}$

Man kann links durch den Nenner heben, nach der Formel

$$\frac{u^5 + v^5}{u + v} = u^4 + v^4 - uv\,(u^2 + v^2) + u^2 v^2$$
$$= (u^2 + v^2)^2 - uv\,(u^2 + v^2) - u^2 v^2$$

Das giebt

$$(a - b)^2 - (a - b)\sqrt{(a - x)\,(x - b)} - (a - x)\,(x - b)$$
$$= (a - b)^2 \text{ u. s. w.}$$

328. $$\frac{(a - x)^2\sqrt{a - x} - (x - b)^2\sqrt{x - b}}{(\sqrt{a - x} - \sqrt{x - b})^5} = 1$$

L. wie in 327.

329. $$\frac{(a - x)^2\sqrt{a - x} + (b + x)^2\sqrt{b + x}}{(a - x)\sqrt{a - x} + (b + x)\sqrt{b + x}} = \sqrt{(a - x)\,(b + x)}$$

L. $x = \frac{a - b}{2}$

Die Gleichung liefert zwei gleiche endliche Wurzeln. — Man bringt den Nenner nach rechts, vereinigt die Glieder mit $\sqrt{a - x}$ und die mit $\sqrt{b + x}$, quadrirt u. s. w.

330. $$\frac{(a - x)^2\sqrt{b + x} + (b + x)^2\sqrt{a - x}}{\sqrt{a - x} + \sqrt{b + x}} = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$$

L. $x = \frac{a - b}{2}$

Man hebe links durch den Nenner. Da bleibt noch

$$\sqrt{(a - x)\,(b + x)}\left(\sqrt{(a - x)^2} - \sqrt{(a - x)\,(b + x)} + \sqrt{(b + x)^2}\right)$$
$$= \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$$

Daraus

$$(a - x)\,(b + x) - (a + b)\sqrt{(a - x)\,(b + x)} + \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = 0$$

$$\sqrt{(a - x)\,(b + x)} - \frac{a + b}{2} = 0 \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichung liefert 4 gleiche Wurzeln. Schafft man alle Wurzelgrössen fort, so erhält man

$$16x^4 - 32\,(a - b)\,x^3 + 24\,(a - b)^2\,x^2 - 8\,(a - b)^3\,x$$
$$+ (a - b)^4 = 0,$$
$$\text{d. h. } \left(2x - (a - b)\right)^2 = 0$$

331. $$\left(x + \sqrt{x^2 - a}\right)^4\left(x - \sqrt{x^2 - a}\right) = c$$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{c}{a}} + a\sqrt[3]{\frac{a}{c}}\right)$

Man erhält zunächst, indem man links zwei ungleiche Factoren mit einander multiplicirt,

$$(x + \sqrt{x^2 - a})^3 \cdot a = c$$

$$x + \sqrt{x^2 - a} = \sqrt[3]{\frac{c}{a}},$$

welche Gleichung am einfachsten wie 307. aufgelöst wird.

332. $\dfrac{x^3 + (a - x^2)\sqrt{a - x^2}}{x + \sqrt{a - x^2}} = c$

L. $x = \dfrac{\sqrt{3a - 2c} + \sqrt{2c - a}}{2}$

Man hebe links durch den Nenner und benutze schliesslich das bei 261. Gesagte. — Dasselbe gilt von der folgenden Aufgabe.

333. $\dfrac{x^3 + (a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} = c\,x\sqrt{a^2 - x^2}$

L. $x = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{c + 3} + \sqrt{c - 1}}{\sqrt{c + 1}}$

---

334. $\dfrac{\sqrt[3]{a - x} - \sqrt[3]{x - b}}{\sqrt[3]{a - x} + \sqrt[3]{x - b}} = \dfrac{a + b - 2x}{a - b}$

L. $x = a,\ b,\ \dfrac{a + b}{2}$

Man wende corr. Add. an, kubire und zerlege schliesslich die Gleichung.

335. $\dfrac{\sqrt[3]{(a - x)^2} + \sqrt[3]{(b - x)^2}}{\sqrt[3]{(a - x)^2} - \sqrt[3]{(b - x)^2}} = \dfrac{a - b}{a + b - 2x}$

L. $x = a,\ b,\ \dfrac{a + b}{2}$

336. $\dfrac{(a - x)\sqrt[3]{(a - x)^2} + (x - b)\sqrt[3]{(x - b)^2}}{\sqrt[3]{(a - x)^2} + \sqrt[3]{(x - b)^2}} = a - b$

L. $x = a,\ b$

337. $\dfrac{(a - x)\sqrt[3]{a + x} + (b + x)\sqrt[3]{b - x}}{\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{b - x}} = \dfrac{a + b}{2}$

L $x = \pm\dfrac{a - b}{2}$

338. $$\frac{(a-x)\sqrt[3]{b+x}+(b+x)\sqrt[3]{a-x}}{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b+x}}=\frac{a+b}{2}$$

L. $x=\frac{a-b}{2}$

Die Gleichung hat 4 gleiche Wurzeln.

339. $$\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}=\sqrt[3]{a-b}$$

L. $x=a,\ b$

340. $$\sqrt{(a-x)^2}+\sqrt[3]{(a-x)(b-x)}+\sqrt[3]{(b-x)^2}=\sqrt[3]{a^2+ab+b^2}$$

L. $x_1=\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{a^2+ab+b^2}$, $x_2=\frac{(a+b)ab}{a^2+ab+b^2}$

Diese Gleichung lässt sich ähnlich behandeln, wie 69. Man erhält zunächst

$$\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{b-x}=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2+ab+b^2}}$$

Hieraus durch Kubiren (vgl. 67.)

$$x^2-(a+b)x+ab=\frac{a^3b^3}{(a^2+ab+b^2)^2}$$

$$x=\frac{a+b}{2}\pm\frac{1}{2}\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}\text{ u. s. w.}$$

Leichter kommt man nach 73. durch corr. Add. zum Ziele.

Setzt man $\sqrt[3]{a-x}=u$ und $\sqrt[3]{b-x}=v$, so kommt man auf

$$\frac{u^2-uv+v^2}{u^2+uv+v^2}=\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2},\quad \frac{u+v}{u-v}=\pm\frac{a+b}{a-b}$$

Die Multiplication dieser beiden Gleichungen liefert

$$\frac{u^3+v^3}{u^3-v^3}=\pm\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$$

$$\text{d. h. }\frac{a+b-2x}{a-b}=\pm\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$$

$$x=\frac{a+b}{2}\mp\frac{a-b}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\text{ u. s. w.}$$

341. $$\sqrt[3]{(a-x)^2}-\sqrt[3]{(a-x)(b+x)}+\sqrt[3]{(b+x)^2}=\sqrt[3]{a^2-ab+b^2}$$

L. $x_1=\frac{(a-b)(a^2+b^2)}{a^2-ab+b^2}$, $x_2=-\frac{(a-b)ab}{a^2-ab+b^2}$

Diese Gleichung ist von der vorhergehenden nur durch das Zeichen von b verschieden.

342. $$\frac{\left(\sqrt[3]{(a-x)^2}-\sqrt[3]{(a-x)(x-b)}+\sqrt[3]{(x-b)^2}\right)^2}{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}}=a-b$$

L. $x=a,\ b$

Man multiplicire mit $\left(\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}\right)^2$, so erhält man 339.

343. $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}=\frac{3}{7}\cdot\frac{a-b}{\sqrt[3]{(a-x)\,(x-b)}}$

L. $x_1=\frac{27a+b}{28},\ x_2=\frac{a+27b}{28}$

344. $\frac{\left(\sqrt[3]{(a-x)^2}+\sqrt[3]{(x-b)^2}\right)^2}{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}}=a-b$

L. $x=a,\ b,\ \frac{a+b}{2}$

345. $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}=\sqrt[3]{c}$

L. $x=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b+2c}{6}\sqrt{\frac{4\,(a-b)-c}{3c}}$

Kubirt man, so fallen nach 67. die Wurzeln sogleich fort, aber man erhält schliesslich den Radicanden

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2-\frac{(c-a+b)^3}{27c},$$

dem man es nicht gleich ansieht, dass er einen quadratischen Factor enthält. Verfährt man jedoch, wie in 70., 71. oder 73. angegeben, so erhält man direct den einfachsten Radicanden und kommt schnell zum Ziel.

346. $\sqrt[3]{(a-x)^2}+\sqrt[3]{(a-x)\,(b-x)}+\sqrt[3]{(b-x)^2}=\sqrt{c^2}$

L. $x=\frac{a+b}{2}+\frac{2(a-b)^2+c^2}{6c^2}\sqrt{\frac{4c^2-(a-b)^2}{3}}$

Dividirt man die Gleichung in die identische

$$\sqrt[3]{(a-x)^3}-\sqrt[3]{(b-x)^3}=a-b,$$

so erhält man

$$\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{b-x}=\frac{a-b}{c}\sqrt[3]{c},$$

welche Gleichung nur durch das 3. Glied von 345. verschieden ist. — Man vgl. auch 340.

347. $\frac{\sqrt[3]{(a-x)^2}-\sqrt[3]{(a-x)\,(x-b)}+\sqrt[3]{(x-b)^2}}{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}}=\sqrt[3]{c}$

L. $x=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\cdot\frac{r+2}{3r}\sqrt{\frac{4r-1}{3}}$ für $r=\sqrt{\frac{c}{a-b}}$

Multiplicirt man mit $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}$ und radicirt, so erhält man leicht

$$\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}=\sqrt{\frac{a-b}{\sqrt[3]{c}}}=\sqrt[3]{\frac{(a-b)\sqrt{a-b}}{\sqrt{c}}}=\sqrt[3]{\frac{a-b}{r}}.$$

Die Lösung dieser Aufgabe folgt also aus der von 345., wenn man dort $\frac{a-b}{r}$ statt c setzt.

348. $\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{b+x} = \frac{c}{\sqrt[3]{(a-x)\,(b+x)}}$

L. $x = \frac{a-b}{2} + \frac{a+b+2c}{2}\sqrt{\frac{a+b-c}{a+b+3c}}$

349. $\frac{\sqrt[3]{(a-x)^2} + \sqrt[3]{(x-b)^2}}{\left(\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{x-b}\right)^2} = c$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \frac{c+1}{3c-1}\sqrt{2c-1}$

350. $\frac{\sqrt[3]{(a-x)^2} - \sqrt[3]{(a-x)\,(x-b)} + \sqrt[3]{(x-b)^2}}{\sqrt[3]{(a-x)^2} + \sqrt[3]{(a-x)\,(x-b)} + \sqrt[3]{(x-b)^2}} = c$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2c}\sqrt{\frac{3c-1}{3-c}}$

351. $\frac{\left[\sqrt[3]{(14+x)^2} + \sqrt[3]{(14-x)^2}\right]^2}{\sqrt[3]{14+x} + \sqrt[3]{14-x}} = 25$

L. $x = \pm 13,\ \pm 3\sqrt{21}$

352. $\sqrt[3]{(a+x)^2} - \sqrt[3]{(a-x)^2} = \sqrt[3]{2cx}$

L. $x = \frac{a+c}{3}\sqrt{\frac{8a-c}{3c}} + \frac{2a-c}{3}\sqrt{\frac{2a-c}{3c}}$

Die Quadratwurzeln können alle möglichen Zeichen haben. Das giebt für x vier Werthe. Dazu kommt noch $x = 0$.

Kubirt man, isolirt die dann noch bleibende Kubikwurzel, kubirt wieder und hebt durch x, so erhält man

(1) $\qquad 4\,(2a-c)^3\,x^2 = 27c\,(a^2-x^2)^2$

Zieht man jetzt die Quadratwurzel, so hat man

(2) $\qquad x^2 + \frac{2x\,(2a-c)}{3}\sqrt{\frac{2a-c}{3c}} - a^2 = 0$

Hieraus x in der gewöhnlichen Weise bestimmt, kommt die oben angegebene Form der Lösung. Man hat dabei jedoch zu berücksichtigen, dass

(3) $\qquad (2a-c)^3 + 27a^2c = (a+c)^2\,(8a-c)$

ist. — Addirt man zu der Gleichung (1) auf beiden Seiten so viel, dass rechts $27c\,(a^2+x^2)^2$ entsteht, also $27c \cdot 4a^2x^2$, so geht dieselbe über in

$$4\,(a+c)^2\,(8a-c)\,x^2 = 27c\,(a^2+x^2)^2$$

Zieht man die Quadratwurzel, so giebt das

$$x^2 - \frac{2x\,(a+c)}{3}\sqrt{\frac{8a-c}{3c}} + a^2 = 0$$

Addirt man diese Gleichung zur Gleichung (2) und hebt durch $2x$, so kommt

$$x + \frac{2a-c}{3}\sqrt{\frac{2a-c}{3c}} - \frac{a+c}{3}\sqrt{\frac{8a-c}{3c}} = 0$$

d. h. x wie oben angegeben. Die zweite Auflösung einer quadratischen Gleichung ist damit umgangen.

353. $x + \sqrt[3]{a - x^3} = \dfrac{c}{x\sqrt[3]{a - x^3}}$

L. $x = \dfrac{\sqrt{a+3c} + \sqrt{a-c}}{2\sqrt[6]{a+3c}}$

Durch Kubiren (nach 67.) erhält man zunächst

$$a + 3c = \frac{c^3}{x^3\,(a - x^3)}$$

(1) $$x\sqrt[3]{a - x^3} = \frac{c}{\sqrt[3]{a+3c}}$$

Dies in die gegebene Gleichung eingesetzt, giebt

(2) $$x + \sqrt[3]{a - x^3} = \sqrt[3]{a + 3c}$$

Hier hat man die Summe zweier Grössen, deren Product in (1) gegeben ist. Man sucht also die Differenz. Man quadrirt (2), zieht die vierfache Gleichung (1) ab und radicirt, so giebt das

(3) $$x - \sqrt[3]{a - x^3} = \frac{\sqrt{a-c}}{\sqrt[6]{a+3c}}$$

Die Addition von (2) und (3) liefert x in der angegebenen Form.

---

354. $\dfrac{(a+x)\sqrt[4]{a+x} + (a-x)\sqrt[4]{a-x}}{\sqrt[4]{a+x} + \sqrt[4]{a-x}} = a$

L. $x = 0$

355. $\dfrac{(a+x)\sqrt[4]{a-x} + (a-x)\sqrt[4]{a+x}}{\sqrt[4]{a+x} + \sqrt[4]{a-x}} = a$

L. $x = 0$

356. $\sqrt[4]{26 - x} + \sqrt[4]{x - 10} = 2$

L. $x = 26,\ 10,\ 18 + 24\sqrt{-7}$

Man quadrire, bringe das doppelte Product nach rechts und quadrire wieder, so entsteht eine Gleichung, welche man leicht durch Zerlegung lösen kann.

357. $$\frac{(a-x)\sqrt[4]{a-x}+(x-b)\sqrt[4]{x-b}}{\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b}}=a-b$$

L. $x=a,\ b,\ \frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sqrt{-3}$

358. $$\frac{(a-x)\sqrt[4]{x-b}+(x-b)\sqrt[4]{a-x}}{\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b}}=\frac{a-b}{2}$$

L. $x=\frac{a+b}{2}$

359. $$(\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x})^3\,(\sqrt[4]{a-x}-\sqrt[4]{b-x})=c$$

L. $x=\frac{a+b}{2}+\frac{(a-b)^2+2(a-b)c-c^2}{\sqrt{2(a-b)c-c^2}}$

Man dividire die gegebene Gleichung durch die identische

(1) $$\sqrt[4]{(a-x)^4}-\sqrt[4]{(b-x)^4}=a-b,$$

so erhält man nach Forthebung der gleichen Factoren

(2) $$\frac{(\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x})^2}{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}=\frac{c}{a-b}$$

Es muss also auch sein

$$\frac{2\sqrt[4]{(a-x)(b-x)}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}=\frac{c-(a-b)}{a-b}$$

Hieraus durch corr. Add. nach 18. 16.

$$\frac{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}=\frac{\sqrt{2(a-b)c-c^2}}{a-b}$$

Jetzt wieder corr. Add. angewendet, quadrirt und nochmals corr. Add. angewendet, giebt sofort und direct

$$\frac{a+b-2x}{a-b}=\frac{(a-b)^2+2(a-b)c-c^2}{2(a-b)\sqrt{2(a-b)c-c^2}}$$ u. s. w.

Man kann auch alle Wurzeln fortschaffen und direct lösen. Die Rechnung wird aber jedenfalls weitläufiger.

360. $$(\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b})^2(\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b})=c(a+b-2x)$$

L. $x_1=\frac{a+b}{2},\ x_2=\frac{a+b}{2}+\frac{2(a-b)(c^2+1)c}{c^4+6c^2+1}$

Man hat identisch

$$a+b-2x=\sqrt[4]{(a-x)^4}-\sqrt[4]{(x-b)^4}.$$

Setzt man dies rechts ein, so sieht man, dass die Gleichung zerfällt in

1. $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt{x-b}=0$ 2. $\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}=0$

3. $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b}=c\left(\sqrt[4]{a-x}-\sqrt[4]{x-b}\right)$

Diese 3 Gleichungen sind statt der gegebenen aufzulösen.

361. $\left(\sqrt[4]{a+x}+\sqrt[4]{a-x}\right)^2\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}\right)=2cx$

L. $x_1=0,\ x_2=\frac{4ac\,(c^2+1)}{c^4+6c^2+1}$

362. $\frac{\left(\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b}\right)^2}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=c$

L. $x=\frac{a+b}{2}+\frac{(a-b)\sqrt{2c-c^2}}{1+2c-c^2}$

Die Gleichung hat dieselbe Form, welche die Gleichung 359. (2) hat. Sie ist also auf dem dort angegebenen Wege zu lösen.

363. $\frac{\sqrt[4]{a-x}-\sqrt[4]{b-x}}{\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}}=\frac{1}{c}\left(\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}\right)^2$

L. $x=\frac{a+b}{2}+\frac{c^2+2(a-b)\,c-(a-b)^2}{4c}\sqrt{\frac{a-b}{2c-a+b}}$

Mit Hülfe der identischen Gleichung 359. (1) erhält man

$$\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}{\left(\sqrt[4]{a-x}-\sqrt[4]{b-x}\right)^2}=\frac{c}{a-b},$$

welche Gleichung in derselben Weise zu behandeln ist, wie 359. (2).

364. $\sqrt[5]{a+x}+\sqrt[5]{a-x}=\sqrt[5]{2a}$

L. $x=\pm a,\ a\sqrt{-3}$

Die einfachste Auflösung geschieht hier mittelst der Erhebung zur 5. Potenz nach der Formel

$$(u+v)^5=u^5+v^5+5uv\,(u+v)^3-5u^2v^2\,(u+v)$$

Hierin ist

$$u=\sqrt[5]{a+x}\qquad v=\sqrt[5]{a-x}\qquad u+v=\sqrt[5]{2a}$$

zu setzen. Das giebt

$$2a=2a+5\sqrt[5]{a^2-x^2}\cdot\sqrt[5]{8a^3}-5\sqrt[5]{(a^2-x^2)^2}\cdot\sqrt[5]{2a}$$

d. h. $\sqrt[5]{4a^2\,(a^2-x^2)}=\sqrt[5]{(a^2-x^2)^2}$ u. s. w.

E.

Gleichungen des 4. Grades, deren Auflösung mit Hülfe quadratischer Gleichungen beschafft werden kann.

365. $x^4 + a x^3 + b x^2 + \frac{1}{2} a \left(b - \frac{1}{4} a^2\right) x + d = 0$

L. $x = \frac{-a + \sqrt{3a^2 - 8b + 2r}}{4}$ für $r = \sqrt{(a^2 - 4b)^2 - 64d}$

a. Man betrachte die beiden ersten Glieder der Gleichung als die beiden ersten Glieder eines Quadrats. Dann kann dies Quadrat kein anderes sein als $(x^2 + \frac{1}{2} a x)^2$. Man versuche daher die gegebene Gleichung so zu schreiben

(1) $$(x^2 + \tfrac{1}{2} a x)^2 + n (x^2 + \tfrac{1}{2} a x) + d = 0,$$

wo n vorläufig noch unbestimmt ist. — Vergleicht man diese Gleichung mit der gegebenen, so muss n zu gleicher Zeit den beiden Gleichungen genügen

(2) $$\tfrac{1}{4} a^2 + n = b \text{ und } \tfrac{1}{2} a n = \tfrac{1}{2} a \left(b - \tfrac{1}{4} a^2\right)$$

Beide liefern

(3) $$n = b - \tfrac{1}{4} a^2$$

Die gegebene Gleichung lässt sich daher wegen (1) und (3) auch so schreiben

$$(x^2 + \tfrac{1}{2} a x)^2 + \left(b - \tfrac{1}{4} a^2\right)(x^2 + \tfrac{1}{2} a x) + d = 0$$

Hieraus

(4) $$x^2 + \tfrac{1}{2} a x = \frac{a^2 - 4b \pm \sqrt{(a^2 - 4b)^2 - 64d}}{8} = \frac{a^2 - 4b \pm r}{8}$$ u. s. w.

b. Jede Gleichung des 4. Grades

(5) $$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

wird sich daher lösen lassen in der angegebenen Weise, d. h. durch zweimalige Auflösung quadratischer Gleichungen, wenn

(6) $$c = \tfrac{1}{2} a \left(b - \tfrac{1}{4} a^2\right)$$

ist. — Hat das erste Glied einen Coefficienten, so dividirt man durch diesen, um zu sehen, ob die Bedingung (6) stattfindet. Aber auch ohne auf diese Bedingung zu achten, wird sich eine Gleichung des 4. Grades immer nur dann in dieser Weise lösen lassen, wenn bei dem in a. angegebenen Verfahren die beiden Gleichungen (2) für n zugleich bestehen können, d. h. für n denselben Werth liefern.

c. Was die Eigenschaften dieser Art von Gleichungen des 4. Grades betrifft, so ist die wichtigste die:

die 4 Wurzeln einer solchen Gleichung lassen sich stets so ordnen, dass die Summe zweier derselben gleich der Summe der beiden andern ist.

Aus der Gleichung (4) ergiebt sich, wenn man

$$(7) \qquad \frac{a^2 - 4b + r}{8} = A \qquad \frac{a^2 - 4b - r}{8} = B$$

setzt, dass man weiter zu lösen hat

$$(8) \qquad x^2 + \tfrac{1}{2} a x = A$$

$$(9) \qquad x^2 + \tfrac{1}{2} a x = B$$

Die Wurzeln dieser beiden Gleichungen sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung. Sind x_1 und x_2 die Wurzeln der Gleichung (8), und x_3 und x_4 die der Gleichung (9), mithin $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung des 4. Grades, so muss wegen der Gleichungen (8) und (9) bekanntlich sein

$$x_1 + x_2 = -\tfrac{1}{2} a \qquad x_3 + x_4 = -\tfrac{1}{2} a$$

$$\text{d. h. } x_1 + x_2 = x_3 + x_4,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

d. Kehrt man den in c. angegebenen Satz um, so ergiebt sich:

Hat man 4 Zahlen von der Beschaffenheit, dass die Summe des einen Paares gleich der Summe des andern Paars ist, so kann man diese 4 Zahlen als Wurzeln einer Gleichung des 4. Grades ansehen, die sich durch zweimaliges Auflösen quadratischer Gleichungen lösen lässt.

Zahlen, welche die genannte Eigenschaft haben, sind z. B. 1, 2, 4, 5; denn $1 + 5 = 2 + 4$. Man kann also setzen

$$(10) \qquad (x - 1)(x - 2)(x - 4)(x - 5) = 0$$

$$\text{d. h. } x^4 - 12x^3 + 49x^2 - 78x + 40 = 0$$

Diese Gleichung muss sich in der oben angegebenen Weise lösen lassen. Man hat

$$(x^2 - 6x)^2 + 13(x^2 - 6x) + 40 = 0$$

$$x^2 - 6x = -5, \ -8 \text{ u. s. w.}$$

Man braucht übrigens das aus den Differenzen jener Zahlen und der Unbekannten gebildete Product nicht $= 0$ zu setzen, wie in (10), sondern kann es, da die Constante keinen wesent-

lichen Einfluss auf die Auflösung hat, auch gleich irgend einer beliebigen bekannten Grösse setzen, die entstehende Gleichung muss sich doch in der bezeichneten Weise lösen lassen, z. B.

$$(x - 1)(x - 2)(x - 4)(x - 5) = 4$$
$$x^2 - 12x^3 + 49x^2 - 78x + 36 = 0$$
$$(x^2 - 6x)^2 + 13(x^2 - 6x) + 36 = 0$$
$$x^2 - 6x = -9, -4$$
$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3 \qquad x_3 = 3 + \sqrt{5} \qquad x_4 = 3 - \sqrt{5}$$

e. Fast alle schwierigeren Gleichungen dieses Buches lassen sich auf Gleichungen des 4. Grades von der hier oben behandelten Art zurückführen. Man hat nur alle Wurzeln und alle Nenner fortzuschaffen, die Gleichung zu ordnen und auf Null zu bringen. Der einfachste Weg ist dies freilich nicht immer. In der Regel werden andere Methoden leichter zum Ziele führen, bei denen man nicht erst das Fortschaffen von Wurzeln und das Auflösen von Potenzen nöthig hat. Im Stiche lässt uns diese allgemeine Methode sehr selten.

366. $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 = 0$

L. $x = \pm 1, 2, 4$

367. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$

L. $x = 1, 2, 3, 4$

368. $32x^4 - 48x^3 - 10x^2 + 21x + 5 = 0$

L. $x = \frac{5}{4}, 1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$

Hier hat man statt der gegebenen Gleichung zunächst zu schreiben

$$2(4x^2 - 3x)^2 - 7(4x^2 - 3x) + 5 = 0$$

369. $x^4 - 12x^3 + 51x^2 - 90x + 56 = 0$

L. $x = 2, 4, 3 \pm \sqrt{2}$

370. $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$

L. $x = 4, 3, -1$

Man multiplicire mit x und versuche dann nach der in 365. angegebenen Methode zu lösen. Man kann dann schreiben

$$(x^2 - 3x)^2 - 4(x^2 - 3x) = 0$$

Daraus durch Zerlegung

1. $x^2 - 3x = 0$ 2. $x^2 - 3x - 4 = 0$ u. s. w.

Die Wurzel $x = 0$ bleibt ausgeschlossen, weil der Factor x erst nachträglich hinzugekommen ist.

371. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$

L. $x = 3, 2, -2, -1$

372. $x^4 - 4ax^3 + 4a^2x^2 - c^4 = 0$

L. $x = a + \sqrt{a^2 + c^2},\ a + \sqrt{a^2 - c^2}$

373. $x^4 - 4ax^3 + (4a^2 + b^2 + c^2)\,x^2 - 2a\,(b^2 + c^2)\,x + b^2c^2 = 0$

L. $x = a + \sqrt{a^2 - b^2},\ a + \sqrt{a^2 - c^2}$

374. $x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3) = 24$

L. $x = 4, -1, \frac{3 + \sqrt{-15}}{2}$

Multiplicirt man den 1. mit dem 4. Factor und den 2. mit dem 3., so sieht man sofort, dass $x^2 - 3x$ die Grösse ist, für welche die Gleichung quadratisch ist.

Allgemeiner ist x immer vermittelst Auflösung quadratischer Gleichungen zu finden, wenn die 4 Factoren, deren Product gleich einer Constanten gesetzt ist, eine arithmetische Progression bilden.

375. $(x + a)\,(x - a)\,(x - 3a)\,(x - 5a) = 16c$

L. $x = 2a + \sqrt{5a^2 + 4\sqrt{a^4 + c}}$

376. $(a - x)^4 + (x - b)^4 = c$

L. $x = \frac{1}{2}\left(a + b + \sqrt{2r - 3\,(a-b)^2}\right)$

für $r = \sqrt{2\,(a-b)^4 + 2c}$

a. Man kann hier genau nach der in 365. angegebenen Methode verfahren. Man entwickelt die Potenzen u. s. w. Zunächst würde man da $x^2 - (a + b)\,x$ zu suchen haben. Die Rechnung ist jedoch auf diesem Wege weitläufiger als nöthig.

b. Ein viel einfacherer Weg ist schon der, zunächst das Product $(a - x)\,(x - b)$, also den Ausdruck $x^2 - (a + b)\,x + ab$ zu bestimmen. Zu dem Zwecke merke man für diese und die später folgenden Aufgaben die leicht zu beweisenden und zum Theil schon angewendeten Formeln

1. $(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3\,(u + v)\,uv$
2. $(u + v)^4 = u^4 + v^4 + 4\,(u + v)^2\,uv - 2u^2v^2$
3. $(u + v)^5 = u^5 + v^5 + 5\,(u + v)^3\,uv - 5\,(u + v)\,u^2v^2$

Wie die Formeln heissen, wenn $u - v$ statt $u + v$ steht, übersieht man leicht.

Setzt man für die oben stehende Gleichung in der Formel 2.

$$u = a - x \qquad v = x - b \qquad u + v = a - b,$$

so erhält man mit Benutzung der gegebenen Gleichung

$$(a - b)^4 = c + 4\,(a - b)^2\,(a - x)\,(x - b) - 2\,(a - x)^2\,(x - b)^2$$

Daraus lässt sich also $(a - x)\,(x - b)$ bestimmen, es wird

$$(a - x)\,(x - b) = (a - b)^2 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2\,(a - b)^4 + 2c} = (a - b)^2 \pm \tfrac{1}{2}r$$

$$x^2 - (a + b)\,x + ab = -(a - b)^2 \mp \tfrac{1}{2}r \text{ u. s. w.}$$

c. Die einfachste Methode der Auflösung ist hier, zwei neue Unbekannte einzuführen, nämlich zu setzen

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} a - x = n + z \\ x - b = n - z \end{bmatrix}$$

Dadurch geht die gegebene Gleichung über in

$$(2 \qquad (n + z)^4 + (n - z)^4 = c$$

Hieraus

$$z^4 + 6n^2z^2 + n^4 = \tfrac{1}{2}c$$

$$(3) \qquad z = \sqrt{-3n^2 + \sqrt{8n^4 + \tfrac{1}{2}c}}$$

Nun geben die Gleichungen (1)

$$(4) \qquad n = \frac{a - b}{2}$$

$$(5) \qquad x = \frac{a + b}{2} - z$$

Setzt man für z und n aus (3) und (4) die gefundenen Werthe, so liefert (5) die oben angegebene Lösung für x.

Käme in der Gleichung $a - x$ und $b - x$ vor, so hätte man statt (1) zu setzen

$$(6) \qquad \begin{bmatrix} a - x = z + n \\ b - x = z - n \end{bmatrix}$$

wenn z die Unbekannte sein soll.

377. $(5 - x)^4 + (2 - x)^4 = 17$

L. $x = 4,\ 3,\ \tfrac{1}{2}\left(7 + \sqrt{-34}\right)$

Man wird hier nach 376. c. am einfachsten setzen

$$5 - x = z + n \qquad 2 - x = z - n$$

Hat man dann z bestimmt, so folgt aus der Substitution

$$n = \tfrac{3}{2} \qquad x = \tfrac{7}{2} - z$$

378. $x^4 + (a - x)^4 = c$

L. $x = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{2r - 3a^2}\right)$ für $r = \sqrt{2a^4 + 2c}$

Man hat zu setzen $x = n + z$, $a - x = n - z$ u. s. w. Oder man löst, wie in 365. angegeben.

379. $x + \sqrt[4]{c - x^4} = a$

L. wie in 378.

Diese Gleichung ist von der vorhergehenden nur durch die Form verschieden und ebenso zu lösen.

380. $(a - x)^4 + (x - b)^4 = (a - b)^4$

L. $x = a,\ b,\ \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sqrt{-7}$

Die Auflösung dieser Gleichung geschieht am einfachsten nach 376. b.

381. $(a - x)^5 + (x - b)^5 = c$

L. $x = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}\sqrt{2r - (a-b)^2}$ für $r = \sqrt{\frac{(a-b)^5 + 4c}{5(a-b)}}$

382. $x^5 + (a - x)^5 = a^5$

L. $x = 0,\ a,\ \frac{1}{2}a\left(1 + \sqrt{-3}\right)$

383. $(a - x)^3 (x - b)^2 + (a - x)^2 (x - b)^3 = a^2 b^2 (a - b)$

L. $x = 0,\ a + b,\ \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 6ab + b^2}$

384. $(a - x)(b + x)^4 + (a - x)^2 (b + x)^3 + (a - x)^3 (b + x)^2 + (a - x)^4 (b + x) = (a + b)\, c$

L. $x = \frac{1}{2}(a - b) + \frac{1}{2}\sqrt[4]{(a + b)^4 - 8c}$

385. $(a - x)(b + x)^4 + (a - x)^4 (b + x) = ab\,(a^3 + b^3)$

L. $x = 0,\ a - b,\ \frac{1}{2}(a - b) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-a^2 + 10ab - b^2}{3}}$

386. $\frac{(a - x)^4 + (x - b)^4}{(a - x)^2 + (x - b)^2} = \frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2}$

L. $x = 0,\ a + b,\ \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(a - b)\sqrt{-\frac{3a^2 - 4ab + 3b^2}{a^2 + b^2}}$

Nach 376. c. setze man

(1) $\qquad a - x = n + z \qquad x - b = n - z$

Darnach muss $a - b = 2n$ sein; man kann daher auch setzen

(2) $\qquad a = m + n \qquad b = m - n,$

woraus folgt

(3) $\qquad m = \frac{a+b}{2} \qquad n = \frac{a-b}{2}$

Durch die Substitution von (1) und (3) geht die gegebene Gleichung über in

$$\frac{(n+z)^4+(n-z)^4}{(n+z)^2+(n-z)^2} = \frac{(m+n)^4+(m-n)^4}{(m+n)^2+(m-n)^2}$$

$$\frac{n^4+6n^2z^2+z^4}{n^2+z^2} = \frac{m^4+6m^2n^2+n^4}{m^2+n^2}$$

Dieser Gleichung wird offenbar genügt durch $z^2 = m^2$, es muss also $z^2 - m^2$ ein Factor der auf Null gebrachten Gleichung sein (s. 105. und C. zu Anfang). Man hat demnach

$$(m^2+n^2)\,z^4 - (m^4-5n^4)\,z^2 - m^2n^2\,(m^2+5n^2) = 0$$

$$(z^2-m^2)\left((m^2+n^2)\,z^2 + n^2\,(m^2+5n^2)\right) = 0$$

$$z = \pm m,\ \pm n\sqrt{-\frac{m^2+5n^2}{m^2+n^2}}$$

Jetzt z und m und n wieder durch x und a und b ersetzt,

$$m = \frac{a+b}{2} \qquad n = \frac{a-b}{2} \qquad z = \frac{a+b}{2} - x,$$

liefert das oben angegebene Resultat. — Die Bemerkung, dass $z^2 - m^2$ ein Factor der sich schliesslich ergebenden Gleichung für z sein müsste, vereinfachte die Rechnung wesentlich. Dieselbe oder eine ähnliche Auflösung hat man bei den folgenden Gleichungen 387.—391. anzuwenden.

387. $\frac{(a-x)^3}{b-x} + \frac{(b-x)^3}{a-x} = \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a}$

L. $x = 0,\ a+b,\ \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sqrt{\frac{2a^2-3ab+2b^2}{ab}}$

388. $\frac{a-x}{(x-b)^2} + \frac{x-b}{(a-x)^2} = \frac{a}{b^2} - \frac{b}{a^2}$

L. $x = 0,\ a+b,\ \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sqrt{\frac{a^2-3ab+b^2}{a^2+ab+b^2}}$

389. $\frac{(a-x)^4+(x-b)^4}{(a+b-2x)^2} = \frac{a^4+b^4}{(a+b)^2}$

L. $x = 0,\ a+b,\ \frac{a^2+b^2}{a+b},\ \frac{2ab}{a+b}$

390. $\frac{(a-x)^5+(x-b)^5}{(a+b-2x)^2} = \frac{a^5-b^5}{(a+b)^2}$

L. $x = 0,\ a+b,\ \frac{a+b}{2} + \frac{(a-b)^2}{a+b}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}$

391. $\frac{(a-x)^5+(x-b)^5}{(a-x)^2+(x-b)^2} = (a-b)^3$

L. $x = a,\ b,\ \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sqrt{-\frac{7}{5}}$

392. $\frac{(a-x)^5+(x-b)^5}{(a-x)^2+(x-b)^2} = c\,(a-x)\,(x-b)$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sqrt{\frac{2r-5\,(a-b)}{2c+5\,(a-b)}}$

für $r = \sqrt{5\,(a-b)^2 + 2\,(a-b)\,c + c^2}$

393. $\frac{(a-x)^3+(x-b)^3}{(a-x)^4+(x-b)^4} = \frac{c}{(a-x)\,(x-b)}$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sqrt{\frac{a-b-6c+2r}{3\,(a-b)+2c}}$

für $r = \sqrt{(a-b)^2 - 4\,(a-b)\,c + 8c^2}$

Bei den beiden letzten Gleichungen 392. und 393. ist wohl der in 376. c. angegebene Weg der kürzeste und einfachste.

---

394. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

L. $x = \frac{r-b+\sqrt{(r-b)^2-16a^2}}{4a}$ für $r = \sqrt{8a^2 - 4ac + b^2}$

a. Die einfachste Auflösung der vorstehenden Gleichung besteht darin, dass man hier zunächst $\frac{x^2+1}{x}$ oder, was auf dasselbe hinausläuft, $\frac{x^2+1}{2x}$ sucht. Man setzt also dies der Uebersicht halber gleich einer neuen Unbekannten,

(1) $$\frac{x^2+1}{2x} = u$$

(2) $$x^2 + 1 = 2ux$$

Quadrirt man (2), so kommt

(3) $$x^4 + 1 = 2\,(2u^2 - 1)\,x^2$$

Zieht man in der gegebenen Gleichung die Glieder mit gleichen Coefficienten zusammen und setzt die Werthe aus (2) und (3) ein, so geht nach Fortheben von x^2 die gegebene Gleichung über in

(4) $$2a\,(2u^2 - 1) + 2bu + c = 0$$

Hieraus

(5) $$u = \frac{-b+\sqrt{8a^2-4ac+b^2}}{4a} = \frac{-b+r}{4a}$$

Damit ist u gefunden und es folgt dann aus (2)

(6) $$x = u + \sqrt{u^2 - 1}$$

Setzt man hierin den in (5) für u gefundenen Ausdruck, so erhält man das oben angegebene Resultat.

b. Die oben stehende Gleichung ist eine symmetrische Gleichung des 4. Grades (vgl. 153. und 195.). Sie bleibt ungeändert, wenn man $\frac{1}{x}$ statt x setzt. Sind demnach x_1 und x_2 zwei Wurzeln der Gleichung, so müssen auch $\frac{1}{x_1}$ und $\frac{1}{x_2}$ Wurzeln derselben sein, die Wurzeln sind also paarweise reziprok. Man kann die Lösung auch leicht in einer solchen Form darstellen, dass das sichtbar wird. Aus der Gleichung (5), wenn man für u seinen Werth in x aus (1) setzt,

$$(7) \qquad \frac{x^2+1}{2x} = \frac{r-b}{4a},$$

folgt nämlich durch corr. Add.

$$(8) \qquad \frac{x+1}{x-1} = \pm\sqrt{\frac{r-b+4a}{r-b-4a}},$$

und hieraus

$$(9) \quad x_1 = \frac{\sqrt{r-b+4a}+\sqrt{r-b-4a}}{\sqrt{r-b+4a}-\sqrt{r-b-4a}} \qquad x_2 = \frac{\sqrt{r-b+4a}-\sqrt{r-b-4a}}{\sqrt{r-b+4a}+\sqrt{r-b-4a}}$$

Mithin ist $x_1 \cdot x_2 = 1$, $x_1 = \frac{1}{x_2}$, $x_2 = \frac{1}{x_1}$. Giebt man r das entgegengesetzte Zeichen, so entstehen aus x_1 und x_2 die beiden andern Wurzeln x_3 und x_4, bei denen also dasselbe Verhältniss stattfinden muss.

c. Diese Darstellungen der Wurzeln der Gleichung durch a, b und r sind nicht die einzigen; es giebt deren unzählige von derselben Form. Die hier angegebenen sind der Art, dass bei Fortschaffung der Quadratwurzeln aus dem Nenner auch zugleich das r im Nenner verschwindet. So hat man aus (9)

$$x = \frac{(\sqrt{r-b+4a}+\sqrt{r-b-4a})^2}{8a}$$

Diese Darstellungen wurden gefunden, indem man in der Gleichung die Substitution (1) machte und zunächst u als neue Unbekannte bestimmte und dann aus dem Werthe von u den Werth von x, durch Auflösung der Gleichung (2) oder mit Hülfe der corr. Addition.

d. Aus der Gleichung (1) hat man durch corr. Addition

$$\frac{x+1}{x-1} = \sqrt{\frac{u+1}{u-1}}$$

Es liegt daher nahe, dass man auch $\frac{x+1}{x-1}$ als neue Unbekannte

wird einführen und diese zunächst suchen können (vgl. 153.). Setzt man demnach

$$\frac{x+1}{x-1} = t, \text{ also} \tag{10}$$

$$x = \frac{t+1}{t-1}, \tag{11}$$

so geht die gegebene Gleichung über in

$$a\,[(t+1)^4 + (t-1)^4] + b\,(t^2-1)\,[(t+1)^2 + (t-1)^2] + c\,(t^2-1)^2 = 0$$

$$2a\,(t^4 + 6t^2 + 1) + 2b\,(t^4 - 1) + c\,(t^4 - 2t^2 + 1) = 0$$

$$(2a + 2b + c)\,t^4 + 2\,(6a - c)\,t^2 + (2a - 2b + c) = 0$$

$$t = \sqrt{\frac{c - 6a - 2r}{2a + 2b + c}}, \tag{12}$$

wo r die oben angegebene Bedeutung hat. Das r kann beide Zeichen haben als Quadratwurzel und ist hier negativ genommen, um die Identität mit den andern Formeln zu erhalten. — Statt (12) kann man aber ebenso gut setzen (283. d.)

$$t = \sqrt{\frac{2a - 2b + c}{c - 6a + 2r}}. \tag{13}$$

Ebenso hat man statt der Formel (7)

$$\frac{x^2+1}{2x} = \frac{r-b}{4a} \tag{14}$$

auch

$$\frac{x^2+1}{2x} = \frac{2a-c}{b+r}. \tag{15}$$

Aus den Gleichungen (14) und (15) ergeben sich durch corr. Add. zwei Formeln für $\frac{x+1}{x-1}$, d. h. für t; man hat aus (14)

$$t = \sqrt{\frac{r - b + 4a}{r - b - 4a}} \tag{16}$$

und aus (15)

$$t = \sqrt{\frac{2a - c + b + r}{2a - c - b - r}} \tag{17}$$

Damit sind schon vier Darstellungen für t gefunden: (12), (13), (16) und (17), aus welchen wieder ebenso viele für $x = \frac{t+1}{t-1}$ folgen. — Hat man zwei solcher Darstellungen gefunden, so ergeben sich daraus alle möglichen übrigen. So kommt aus den Formeln (12) und (13) nach dem Correspondenzsatz durch Addition (283. d.) die Formel (17), nämlich

$$t = \sqrt{\frac{(2a - 2b + c) + (c - 6a - 2r)}{(c - 6a + 2r) + (2a + 2b + c)}} = \sqrt{\frac{2a - c + b + r}{2a - c - b - r}}$$

Aus denselben Formeln ergiebt sich nach dem Correspondenzsatz durch Subtraction die Formel (16), nämlich

$$t = \sqrt{\frac{(2a - 2b + c) - (c - 6a - 2r)}{(c - 6a + 2r) - (2a + 2b + c)}} = \sqrt{\frac{r - b + 4a}{r - b - 4a}}$$

Umgekehrt folgen aus den Formeln (16) und (17) auf denselben Wegen die Formeln (12) und (13).

Allgemein wird man aus den Formeln (12) und (13) nach 283. (8) folgende Formel erhalten

$$t = \sqrt{\frac{m(2a - 2b + c) + m_1(c - 6a - 2r)}{m(c - 6a + 2r) + m_1(2a + 2b + c)}}$$

und aus (16) und (17)

$$t = \sqrt{\frac{n(r - b + 4a) + n_1(2a - c + b + r)}{n(r - b - 4a) + n_1(2a - c - b - r)}}.$$

Bestimmt man hieraus $x = \frac{t+1}{t-1}$ und setzt diesen Werth in die gegebene Gleichung, so müssen die willkürlichen Factoren m, m_1, n und n_1 wieder verschwinden. — Sind statt in Buchstaben die bekannten Grössen in Zahlen gegeben, so fallen die willkürlichen Factoren natürlich schon in den Ausdrücken für t heraus und man erhält, wie man auch die Rechnung einrichtet, immer nur zwei Werthe für t^2.

e. Von Interesse ist es noch für t diejenige Darstellung herauszufinden, welche für einen Ausdruck von der Form

$$\frac{\mu + \mu_1 t^2}{\nu + \nu_1 t^2} \tag{18}$$

kein r im Nenner liefert. — Es seien in (12) und (13) die Darstellungen für t allgemein diese

$$t = \sqrt{\frac{A - r}{B}} \tag{19}$$

$$t = \sqrt{\frac{C}{A + r}}, \tag{20}$$

wo A, B und C kein r enthalten. Dann muss man hieraus nach dem Correspondenzsatz bilden

$$t = \sqrt{\frac{(A - r)\nu + C\nu_1}{B\nu + (A + r)\nu_1}}. \tag{21}$$

Man hat also den Radicanden in (19) mit ν, den in (20) mit ν_1 zu erweitern und den Correspondenzsatz mit Addition anzuwenden (283. d.). Dann wird der Nenner des Ausdrucks in (18)

$$v\,[Bv + (A + r)\,v_1] + v_1\,[(A - r)\,v + Cv_1]$$
$$= Bv^2 + 2Avv_1 + Cv_1^2,$$

enthält also kein r.

Hätten die rr in (19) und (20) gleiche Zeichen, so müsste man statt der Addition die Subtraction anwenden.

395. $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$

L. $x = \frac{r - b + \sqrt{(r-b)^2 + 16a^2}}{4a}$ für $r = \sqrt{b^2 - 8a^2 - 4ac}$

Diese Gleichung ist nicht ganz symmetrisch, lässt sich aber ganz ähnlich lösen wie eine symmetrische (394. a.). Zieht man hier die Glieder mit b zusammen, so übersieht man sofort, dass man hier nicht wie in 394. (2) zu setzen hat $x^2 + 1 = 2ux$, sondern

(1) $$x^2 - 1 = 2ux, \text{ also}$$
$$x^4 + 1 = 2\,(2u^2 + 1)\,x^2$$

Das liefert für u die Gleichung

$$2a\,(2u^2 + 1) + 2bu + c = 0.$$

Hieraus ergiebt sich

(2) $$u = \frac{-b + r}{4a}.$$

Dann kommt aus (1)

$$x = u + \sqrt{u^2 + 1}$$

Setzt man hierin den in (2) für u gefundenen Werth, so erhält man x, wie angegeben.

396. $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

L. $x = \frac{a - b + r + \sqrt{(a - b + r)^2 - 16a^2}}{4a}$

für $r = \sqrt{(a+b)^2 + 4a\,(a-c)}$

Ausserdem hat man auch noch $x = -1$. — Vereinigt man die Glieder mit gleichen Coefficienten, so sieht man, dass die Gleichung einen Factor $x + 1$ hat. Dividirt man durch diesen, so bleibt noch eine symmetrische Gleichung des 4. Grades

$$ax^4 - (a - b)\,x^3 + (a - b + c)\,x^2 - (a - b)\,x + a = 0,$$

welche wie 394. zu behandeln ist.

In derselben Weise würde man natürlich auch lösen können

$$ax^5 - bx^4 + cx^3 - cx^2 + bx - a = 0,$$

nur dass hier der Factor $x - 1$ herauszuheben wäre, der die Wurzel $x = 1$ liefert. Es bliebe dann noch zu lösen

$$a x^4 + (a - b) x^3 + (a - b + c) x^2 + (a - b) x + a = 0$$

397. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$

L. $x = 1, \sqrt{-1}$

398. $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$

L. $x = 2, \frac{1}{2}, \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$

399. $90x^4 - 399x^3 + 622x^2 - 399x + 90 = 0$

L. $x = \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}$

400. $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 0$

L. $x = \pm 1, 1 \pm \sqrt{2}$

Die Auflösung ist hier nach 395. zu bewerkstelligen. — Einfacher noch zerlegt man

$$(x^2 - 1)^2 = 2x(x^2 - 1), \text{ also}$$

1. $x^2 - 1 = 0$ 2. $x^2 - 1 = 2x$

401. $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

L. $x = 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$

402. $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$

L. $x = \pm 1, 2, \frac{1}{2}$

Für die Auflösung gilt das in 400. Gesagte.

403. $2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$

L. $x = \pm 1, 2, -\frac{1}{2}$

404. $\frac{x^4 + 1}{2x(x^2 + 1)} = \frac{a}{b}$

L. $x = \frac{a + r + \sqrt{(a + r)^2 - 4b^2}}{2b}$ für $r = \sqrt{a^2 + 2b^2}$

Man forme links den Ausdruck so um, dass nur $x^2 + 1$ und x vorkommt, schreibe also

$$\frac{(x^2 + 1)^2 - 2x^2}{2x(x^2 + 1)} = \frac{a}{b}$$

Hierin ist nach 394. a.

(1) $$x^2 + 1 = ux$$

zu setzen. Das giebt

$$\frac{u^2 - 2}{2u} = \frac{a}{b}$$

Ist hieraus u bestimmt, so ergiebt sich x aus der Gleichung (1).

405. $\dfrac{(x+1)^2\,(x^2+1)}{(x-1)^2\,(x^2-x+1)} = \dfrac{a}{b}$

L. $x = \dfrac{3a+b+r+\sqrt{(3a+b+r)^2-16\,(a-b)^2}}{4\,(a-b)}$

für $r = \sqrt{a^2+20ab+4b^2}$

406. $\dfrac{(x-1)^2\,x}{(x^2-x+1)^2} = \dfrac{a}{b}$

L. $x = \dfrac{2a+b+r+\sqrt{(2a+b+r)^2-16a^2}}{4a}$ für $r = \sqrt{b^2-4ab}$

a. In der vorstehenden Gleichung ist der Nenner links ein Quadrat. Diesem entspricht rechts die Grösse b. Diese Grösse b findet sich als Factor im Radicanden von r. Der andere Factor dieses Radicanden ist $b-4a$. Wendet man auf die gegebene Gleichung die corr. Add. in der Art an, dass rechts im Zähler $b-4a$ zu stehen kommt statt a, so muss auch der Zähler links ein Quadrat werden. Man hat

$$\frac{b-4a}{b} = \frac{(x^2-x+1)^2-4\,(x-1)^2\,x}{(x^2-x+1)^2} = \frac{(x^2-3x+1)^2}{(x^2-x+1)^2}$$

Jetzt kann man weiter lösen, indem man radicirt

$$\frac{x^2-3x+1}{x^2-x+1} = \sqrt{\frac{b-4a}{b}} = \frac{\sqrt{b^2-4ab}}{b} = \frac{r}{b}$$

Hieraus durch corr. Add.

$$\frac{x+1}{x-1} = \sqrt{\frac{5b-3r}{b+r}}$$

$$(1) \qquad x = \frac{\sqrt{5b-3r}+\sqrt{b+r}}{\sqrt{5b-3r}-\sqrt{b+r}}$$

Schafft man alle Wurzeln aus dem Nenner fort, so geht aus dieser Form der Lösung die oben angegebene hervor.

In (1) ist x durch r und b, dem einen Factor von r^2, allein dargestellt. Ebenso gut würde man x durch r und $b-4a$, den andern Factor von r^2, allein darstellen können, ohne dass sich dadurch die Form wesentlich änderte.

b. Hier ist die Darstellung von x durch r und b direct gefunden. Hat man nur irgend eine Darstellung von x, so kann man daraus jene specielle leicht ableiten. — Es ist im vorliegenden Falle

$$r^2 = b^2-4ab$$

$$2a = \frac{b^2-r^2}{2b}$$

Setzt man dies in die oben zuerst gegebene Lösung und hebt durch $b+r$, so erhält man

$$(2) \qquad x = \frac{3b - r + \sqrt{(3b - r)^2 - 4(b - r)^2}}{2(b - r)},$$

welche Formel genau mit der in (1) gefundenen stimmt, wenn man in letzterer Zähler und Nenner mit $\sqrt{5b - 3r} + \sqrt{b + r}$ multiplicirt.

c. Hat man allgemein die symmetrische Gleichung des 4. Grades

$$\frac{mx^4 + nx^3 + px^2 + nx + m}{m_1x^4 + n_1x^3 + p_1x^2 + n_1x + m_1} = \frac{a}{b},$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$mx^4 + nx^3 + px^2 + nx + m = X$$
$$m_1x^4 + n_1x^3 + p_1x^2 + n_1x + m_1 = X_1$$

setzt, die Gleichung

$$\frac{X}{X_1} = \frac{a}{b},$$

so gelten, wenn r die Wurzelgrösse bedeutet, welche aus der Auflösung der ersten quadratischen Gleichung hervorgeht, darüber folgende Sätze:

1. Ist X ein Quadrat, so lässt sich r^2 in zwei rationale Factoren zerlegen, von denen einer a ist. — Lässt sich, umgekehrt, r^2 in zwei rationale Factoren zerlegen, von denen einer a ist, so muss X ein Quadrat sein.

2. Ist X ein Quadrat oder hat r^2 einen Factor a, so lässt sich x durch r und a allein darstellen, ohne dass die Form der Lösung sich wesentlich ändert.

3. Ist X ein Quadrat, so muss es ein paar einfache, aus den Coefficienten der Ausdrücke X und X_1 herzuleitende rationale Zahlen α und β geben, dass auch $\alpha X + \beta X_1$ ein Quadrat ist. Dann ist $\alpha a + \beta b$ der andere Factor von r^2, also $r^2 = a(\alpha a + \beta b)$. Und ist, umgekehrt, $\alpha a + \beta b$ der andere Factor von r^2, so muss auch $\alpha X + \beta X_1$ ein Quadrat sein.

4. Zerfällt r^2 in zwei Factoren, dass etwa

$$r^2 = (\alpha a + \beta b)(\alpha_1 a + \beta_1 b),$$

so muss $\alpha X + \beta X_1$ sowohl, als auch $\alpha_1 X + \beta_1 X_1$ ein Quadrat sein, und x muss sich durch r und einen dieser Factoren allein darstellen lassen, ohne wesentliche Veränderung in der Form.

5. Da r^2 ein homogener Ausdruck des 2. Grades von a und b sein muss, so muss es, wenn es einen reellen rationalen Factor $\alpha a + \beta b$ hat, noch einen zweiten solchen $\alpha_1 a + \beta_1 b$ haben.

Daraus folgt: Giebt es zwei reelle rationale Zahlen α und β, welche $\alpha X + \beta X_1$ zu einem Quadrat machen, so muss es auch noch zwei andere α_1 und β_1 geben, dass $\alpha_1 X + \beta_1 X_1$ ebenfalls ein Quadrat wird.

6. Was hier von X und a gesagt ist, gilt natürlich in derselben Weise von X_1 und b.

Die Darstellung von x durch r und den einen Factor von r^2 kann nur dann besonders einfach werden, wenn a oder b einer dieser Factoren ist, oder, was dasselbe sagen will, wenn X oder X_1 ein Quadrat ist. Im obigen Falle ist X_1 ein Quadrat und die Darstellung von x durch r und b ist in (1) gegeben.

d. Die Darstellung von x durch r und b in (1) und in (2) ist oben indirect auf einem etwas künstlichen Wege gefunden. Da nach den in c. mitgetheilten Sätzen sofort zu erkennen ist, ob eine solche Darstellung möglich, so fragt sich, wie man dieselbe direct findet: Man muss nicht $\frac{x^2+1}{x}$ oder $\frac{x^2+1}{2x}$, oder $\frac{x+1}{x-1} = t$ als neue Unbekannte zunächst suchen, sondern man hat, wenn z. B.

$$X_1 = (\alpha x^2 + \beta x + \alpha)^2 \tag{3}$$

ist, allgemein zu setzen

$$\frac{\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \alpha_1}{\alpha x^2 + \beta x + \alpha} = u.$$

Die Zahlen α_1 und β_1 sind ganz willkürlich. Man setzt daher am einfachsten $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, d. h.

$$\frac{x}{\alpha x^2 + \beta x + \alpha} = u. \tag{4}$$

In der vorgelegten Gleichung 406. wird man daher setzen müssen

$$\frac{x}{x^2 - x + 1} = u. \tag{5}$$

Indem man die Gleichung so geschrieben denkt:

$$\frac{(x^2 - x + 1) - x}{x^2 - x + 1} \cdot \frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{a}{b}$$

erhält man wegen (5) als Gleichung für u sofort

$$(1 - u)\, u = \frac{a}{b}.$$

Das liefert

$$u = \frac{b - r}{2b} \text{ für } r = \sqrt{b^2 - 4ab} \tag{6}$$

Aus (5) und (6) hat man nun weiter

$$\frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{b - r}{2b}$$

$$\frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2b - 2r}{3b - r}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = \sqrt{\frac{5b - 3r}{b + r}} \tag{7}$$

$$x = \frac{\sqrt{5b - 3r} + \sqrt{b + r}}{\sqrt{5b - 3r} - \sqrt{b + r}} = \frac{3b - r + \sqrt{(5b - 3r)(b + r)}}{2(b - r)},$$

womit die Darstellungen (1) und (2) direct gefunden sind.

e. Setzt man nach 394. (11)

$$x = \frac{t+1}{t-1}$$

in die vorgelegte Gleichung 406., so geht dieselbe über in

$$\frac{4(t^2 - 1)}{(t^2 + 3)^2} = \frac{a}{b}, \tag{8}$$

$$at^4 + 2(3a - 2b)t^2 + 9a + 4b = 0.$$

Daraus folgt

$$t = \sqrt{\frac{-3a + 2b - 2r}{a}} = \sqrt{\frac{9a + 4b}{-3a + 2b + 2r}} \tag{9}$$

$$\text{für } r = \sqrt{b^2 - 4ab}$$

(s. 283. d. und 394. c. und d.). Sucht man aus diesen beiden Formeln für t eine solche, nach welcher r bei der Substitution in (8) im Nenner verschwindet, so erhält man ebenfalls die Formel für t, d. h. $\frac{x+1}{x-1}$, welche nur r und b enthält. Man hat nach 394. e. aus den Formeln (9) wegen $t^2 + 3$ in (8) zu bilden

$$t = \sqrt{\frac{3(-3a + 2b - 2r) + (9a + 4b)}{3a + (-3a + 2b + 2r)}} = \sqrt{\frac{5b - 3r}{b + r}}, \tag{10}$$

d. h. man hat auf die Formeln für t in (9) den Correspondenzsatz in der Art anzuwenden, dass das a herausfällt. Und das ist immer möglich, sobald in der gegebenen Gleichung dem b rechts ein Quadrat links entspricht. —

In (10) ist damit wieder die Gleichung (7) gefunden, aus der x in der gewünschten Weise folgt.

Damit sind vier Wege angegeben, auf welchen man zu derjenigen Darstellung von x gelangt, welche nur r und b enthält.

407. $\dfrac{(x^2+x+1)^2}{(x+1)^2\,(x^2+1)} = \dfrac{a}{b}$

L. $x = \dfrac{\sqrt{a+r}+\sqrt{a-3r}}{\sqrt{a+r}-\sqrt{a-3r}}$ für $r = \sqrt{a^2-ab}$

Will man diese Darstellung von x direct erhalten, so hat man zu setzen nach 406. d.

(1) $$\frac{x}{x^2+x+1} = u$$

und u zunächst zu bestimmen. Das giebt

$$\frac{1}{(1+u)\,(1-u)} = \frac{a}{b}$$

$$u = \sqrt{1-\frac{b}{a}} = \frac{r}{a}$$

d. h. $$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{r}{a}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = \sqrt{\frac{a+r}{a-3r}}$$ u. s. w.

408. $\dfrac{(x^2+1)^2}{x\,(x+1)^2} = \dfrac{a}{b}$

L. $x = \dfrac{\sqrt{a+r}+\sqrt{3a-r}}{\sqrt{a+r}-\sqrt{3a-r}}$ für $r = \sqrt{a^2+8ab}$

409. $\dfrac{(x+1)^4}{x\,(x^2+1)} = \dfrac{a}{b}$

L. $x = \dfrac{1+r}{1-r}$ für $r = \sqrt[4]{1-\dfrac{8b}{a}}$

410. $\dfrac{x\,(x+1)^2}{(x-1)^4} = \dfrac{a}{b}$

L. $x = \dfrac{\sqrt{b+r}+\sqrt{2b}}{\sqrt{b+r}-\sqrt{2b}}$ für $r = \sqrt{16ab+b^2}$

411. $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2} \cdot \dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2} = \dfrac{a}{b}$

L. $x = \dfrac{\sqrt{4a-b}+\sqrt{3b}}{2\sqrt{a-b}}$

Ueber die Lösung siehe 261. und 276.

412. $\dfrac{x^4-x^2+1}{(x^2-1)^2} = \dfrac{a}{b}$

L. $x = \dfrac{\sqrt{4a-3b}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a-b}}$

413. $\dfrac{x\,(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{a}{b}$

L. $x = \dfrac{\sqrt{r+b}+\sqrt{2b}}{\sqrt{r-b}}$ für $r = \sqrt{16a^2+b^2}$

Diese Form der Lösung findet man, wenn man

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = u$$

setzt und u zunächst bestimmt. Man findet

$$u = \sqrt{\frac{r+b}{2b}}, \text{ also}$$

$$x^2 = \frac{\sqrt{r+b}+\sqrt{2b}}{\sqrt{r+b}-\sqrt{2b}} = \frac{(\sqrt{r+b}+\sqrt{2b})^2}{r-b} \text{ u. s. w.}$$

414. $\dfrac{(x+1)^4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \dfrac{a}{b}$

L. $x = \dfrac{\sqrt{2a}+\sqrt{r-a}}{\sqrt{2a}-\sqrt{r-a}} = \dfrac{\sqrt{r+a}+2\sqrt{b}}{\sqrt{r+a}-2\sqrt{b}}$ für $r = \sqrt{a^2+8ab}$

415. $(a^2-b^2)\,x^2 = 4b^2(x^2+1)(x^2-x+1)$

L. $x = \dfrac{\sqrt{a+5b}+\sqrt{a-3b}}{\sqrt{a+5b}-\sqrt{a-3b}}, \dfrac{\sqrt{a-5b}+\sqrt{a+3b}}{\sqrt{a-5b}-\sqrt{a+3b}}$

416. $\dfrac{(x^2+x+1)^2}{x(x^2+1)} = \dfrac{a}{b}$

L. $x = \dfrac{\sqrt{3a-r}+\sqrt{3r-a}}{\sqrt{3a-r}-\sqrt{3r-a}}$ für $r = \sqrt{a^2-4ab}$

417. $\dfrac{x(x+1)^2}{(x^2+1)(x-1)^2} = \dfrac{(a-b)\,b}{2a(b-2a)}$

L. $x = \dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{2a-b}}{\sqrt{b}-\sqrt{2a-b}}, \dfrac{\sqrt{a-b}+\sqrt{a}}{\sqrt{a-b}-\sqrt{a}}$

418. $\dfrac{(x^2-x+1)^2}{x^4-x^3+x^2-x+1} = \dfrac{4a^2}{5a^2-b^2}$

L. $x = \dfrac{\sqrt{5a-3b}+\sqrt{a+b}}{\sqrt{5a-3b}-\sqrt{a+b}}, \dfrac{\sqrt{5a+3b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{5a+3b}-\sqrt{a-b}}$

419. $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^4-x^3+x^2-x+1} = \dfrac{a}{b}$

L. $x = \dfrac{\sqrt{r+a}+\sqrt{5a-3r}}{2\sqrt{r-a}}$ für $r = \sqrt{a^2+4(a-b)^2}$

420. $\dfrac{(x^2+x+1)(x+1)^2}{(x^2-x+1)(x-1)^2} = \dfrac{a}{b}$

L. $x = \dfrac{\sqrt{7a-b+r}+\sqrt{7b-a+r}}{\sqrt{7a-b+r}-\sqrt{7b-a+r}}$ für $r = \sqrt{a^2+34ab+b^2}$

421. $\dfrac{(x+1)(x^3+1)}{(x-1)(x^3-1)} = \dfrac{a}{b}$

L. $x = \dfrac{\sqrt{5a-3b+r}+\sqrt{5b-3a+r}}{\sqrt{5a-3b+r}-\sqrt{5b-3a+r}}$

$= \dfrac{a+b+r+\sqrt{(a+b+r)^2-16(a-b)^2}}{4(a-b)}$

für $r = \sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$

422. $\dfrac{(x+1)(x^5-1)}{(x-1)(x^5+1)} = \dfrac{a}{b}$

L. $x = \dfrac{\sqrt{r-2b}+\sqrt{2a-r}}{\sqrt{r-2b}-\sqrt{2a-r}}$ für $r = \sqrt{5a^2-6ab+5b^2}$

423. $\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4-x^3+x^2-x+1} = \dfrac{a}{b}$

L. wie in 422.

424. $\dfrac{(x+1)^4}{x^4+1} = \dfrac{a}{b}$

L. $x = \dfrac{1+\sqrt{2r-3}}{1-\sqrt{2r-3}}$ für $r = \sqrt{2\left(1+\dfrac{b}{a}\right)}$

425. $\dfrac{(x+1)^5}{x^5+1} = \dfrac{a}{b}$

L. $x = \dfrac{1+\sqrt{2r-1}}{1-\sqrt{2r-1}}$ für $r = \sqrt{\dfrac{a+4b}{5a}}$

426. $ax^6 + bx^5 + cx^4 = a + bx + cx^2$

L. $x = \dfrac{r-b+\sqrt{(r-b)^2-16a^2}}{4a}$ für $r = \sqrt{4a^2-4ac+b^2}$

Ausserdem gilt noch $x = \pm 1$. — Die Gleichung hat einen Factor x^2-1. Dieser, $= 0$ gesetzt, giebt die beiden Wurzeln ± 1. Zieht man den Factor heraus, so bleibt nur noch eine symmetrische Gleichung des 4. Grades

$$a(x^4+1) + b(x^2+1)x + (a+c)x^2 = 0$$

427. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} = \dfrac{1}{a}$

L. $x = \frac{1}{2}a\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)$

Man schaffe die Wurzel fort, setze $x = az$ und bestimme zunächst z.

428. $x^4 = \dfrac{ax-b}{bx-a}$

L. $x = \dfrac{\sqrt{2a-r}+\sqrt{r-2b}}{\sqrt{2a-r}-\sqrt{r-2b}}$ für $r = \sqrt{(a-b)^2+4b^2}$

---

429. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{a}$

L. $x = \frac{1}{2}\left[a+r+\sqrt{2-(a+r)^2}\right]$ für $r = \sqrt{a^2+1}$

Die Gleichung ist nicht symmetrisch, obwohl die Lösung eine ähnliche Form annimmt, wie bei den symmetrischen

Gleichungen. — Man macht gleichnamig und quadrirt, so erhält man für $x\sqrt{1-x^2} = u$ eine quadratische Gleichung. Ist u gefunden, so hat man nach der gegebenen Gleichung auch $x + \sqrt{1-x^2}$ u. s. w.

430. $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2c}{c^2-1}$

L. $x = \frac{1}{2}\left(c + \sqrt{2-c^2}\right), \frac{1}{2c}\left(-1 + \sqrt{2c^2-1}\right)$

431. $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = a$

L. $x = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+4+4r}\right)$ für $r = \sqrt{a^2+1}$

---

432. $2(a-x)^4 - 9(a-x)^3(x-b) + 14(a-x)^2(x-b)^2 - 9(a-x)(x-b)^3 + 2(x-b)^4 = 0$

L. $x = \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, \frac{a+2b}{3}, \frac{2a+b}{3}$

Die Gleichung ist symmetrisch in Bezug auf $a-x$ und $x-b$. Man setze daher nach 394. (1) oder 404. (1)

(1) $(a-x)^2 + (x-b)^2 = (a-x)(x-b)\,u$, also

$(a-x)^4 + (x-b)^4 = (a-x)^2(x-b)^2(u^2-2)$

Das giebt für u die Gleichung

$$2u^2 - 9u + 10 = 0$$

Diese liefert $u = 2$ und $u = \frac{5}{2}$, dann ist (1) weiter zu lösen nach 172. ff. — Man hätte auch einfach

$$\frac{a-x}{x-b} = \frac{t+1}{t-1}$$

setzen und zunächst t suchen können. — Auch nach den bei 376. erörterten Methoden kommt man hier sehr gut zum Ziele.

433. $4(a-x)^4 - 17(a-x)^2(x-b)^2 + 4(x-b)^4 = 0$

L. $x = 2a-b,\ 2b-a, \frac{2a+b}{3}, \frac{2b+a}{3}$

434. $6(a-x)^4 - 25(a-x)^3(x-b) + 38(a-x)^2(x-b)^2 - 25(a-x)(x-b)^3 + 6(x-b)^4 = 0$

L. $x = \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, \frac{3a+2b}{5}, \frac{2a+3b}{5}$

435. $a x^8 + b x^6 + c x^4 + b x^2 + a = 0$

L. $x = \sqrt{\frac{4a - b + r}{8a}} + \sqrt{\frac{-4a - b + r}{8a}}$

für $r = \sqrt{8a^2 - 4ac + b^2}$

Wie in den Aufgaben 394. ff. zunächst $\frac{x^2+1}{x}$ gesucht wurde, so sucht man hier $\frac{x^4+1}{x^2}$, setzt also

$$x^4 + 1 = u x^2$$

$$x^8 + 1 = (u^2 - 2) x^4$$

Dadurch geht die gegebene Gleichung über in

$$a(u^2 - 2) + bu + c = 0$$

und man erhält

$$u = \frac{-b + r}{2a}$$

Man hat daher weiter aus

$$\frac{x^4 + 1}{2x^2} = \frac{-b + r}{4a}$$

durch corr. Add.

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{4a - b + r}{-4a - b + r}}$$

$$x^2 = \frac{\sqrt{4a - b + r} + \sqrt{-4a - b + r}}{\sqrt{4a - b + r} - \sqrt{-4a - b + r}} = \frac{(\sqrt{4a - b + r} + \sqrt{-4a - b + r})^2}{8a}$$

Jetzt radicirt, kommt das oben angegebene Resultat.

Die vorgelegte Gleichung ist vom 8. Grade, sie hat daher auch 8 Wurzeln. Nimmt man r positiv, so liefert das 4 Werthe für x, indem man den Quadratwurzeln alle möglichen Zeichen giebt; nimmt man r negativ, so liefert das noch 4 Werthe.

Führt man $\frac{x^2+1}{x^2-1} = t$ als neue Unbekannte ein und bestimmt zunächst t, so muss man mit Hülfe des Correspondenzsatzes dem Ausdrucke für t eine solche Form geben, dass r im Zähler und Nenner des Radicanden gleiche Zeichen und Coefficienten hat, wenn schliesslich in der Lösung r im Nenner verschwinden soll. Sucht man $\frac{x^4+1}{x^2} = u$ zunächst, so ergiebt sich diese Form für $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ direct.

436. $\frac{x^4}{(x^4+1)(x^2-1)^2} = \frac{a}{b}$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r+3} + \sqrt{r-1}\right)$ für $r = \sqrt{1 + \frac{b}{a}}$

437. $\frac{x^4}{x^8+x^4+1} = \frac{a}{b}$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r+2} + \sqrt{r-2}\right)$ für $r = \sqrt{1+\frac{b}{a}}$

438. $\frac{(x^4-x^2+1)^2}{x^8-x^4+1} = \frac{a}{b}$

L. $x = \frac{\sqrt{2a-3b+r} + \sqrt{-2a+b+r}}{2\sqrt{a-b}}$ für $r = \sqrt{3a^2-2ab}$

439. $\frac{(x^6+1)(x^2+1)}{(x^6-1)(x^2-1)} = \frac{a}{b}$

L. $x = \frac{\sqrt{5a-3b+r} + \sqrt{5b-3a+r}}{2\sqrt{2(a-b)}}$ für $r = \sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$

440. $\frac{(x^4+x^2+1)(x^2+1)^2}{(x^4-x^2+1)(x^2-1)^2} = \frac{a}{b}$

L. $x = \frac{\sqrt{7a-b+r} + \sqrt{7b-a+r}}{2\sqrt{2(a-b)}}$ für $r = \sqrt{a^2+34ab+b^2}$

441. $\frac{(x^2+1)(x^{10}-1)}{(x^2-1)(x^{10}+1)} = \frac{a}{b}$

L. $x = \frac{\sqrt{5a-3b+r} + \sqrt{5b-3a+r}}{2\sqrt{2(a-b)}}$ für $r = \sqrt{5a^2-6ab+5b^2}$

442. $\frac{(x^4+x^2+1)^2}{x^2(x^4+1)} - \frac{m^2}{m-1}$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{m+1} + \sqrt{m-3}\right)$, $\frac{\sqrt{2m-1} + \sqrt{3-2m}}{2\sqrt{m-1}}$

443. $\frac{(x^4+1)^2}{(x^4+x^2+1)(x^2+1)^2} = \frac{2(m-1)^2}{m}$

L. $x = \frac{\sqrt{m} + \sqrt{2-3m}}{\sqrt{2(2m-1)}}$, $\frac{1+\sqrt{2m-3}}{\sqrt{2(2-m)}}$

444. $\frac{a}{x}\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}} = c$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2+2a+2ar} + \sqrt{c^2-2a+2ar}\right)$
für $r = \sqrt{c^2+1}$

Man schaffe die Wurzeln fort, ordne nach x und bestimme zunächst $\frac{x^4+a^2}{x^2}$, indem man dies $= u$ als neue Unbekannte einführt. — Man findet

$$\frac{x^4+a^2}{x^2} = c^2 + 2ar$$

$$\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{c^2+2a+2ar}{c^2-2a+2ar}}$$ u. s. w.

445. $\dfrac{(\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b})^2}{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b}} = \sqrt{c}$

L. $x = \dfrac{a+b}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{(4(a-b)+c-r)(r-c)}$ für $r = \sqrt{8(a-b)c+c^2}$

a. Für die Auflösung dieser und fast aller folgenden Aufgaben bis 492. lassen sich ganz allgemein zwei Wege angeben. Der erste Weg ist, alle Wurzelgrössen auf dem gewöhnlichen Wege fortzuschaffen. Dann erhält man eine Gleichung von der Form 365. ff. oder 376. ff., welche nach den dort angegebenen Methoden zu lösen ist. Bei den meisten Gleichungen wird die Rechnung jedoch sehr umständlich, muss aber zum Ziele führen.

b. Der zweite Weg ist, die Gleichung auf eine andere zu reduciren, welche die Form 394. ff. hat. Man hat zu dem Zwecke den Coefficienten der vorkommenden Wurzelgrössen gleich einer neuen Unbekannten z zu setzen. Dann muss sich für z eine symmetrische Gleichung des 4. Grades ergeben, deren Auflösungsmethoden oben angegeben sind. — Für die vorgelegte Gleichung hat man zu setzen

(1) $$\sqrt{\frac{a-x}{x-b}} = z, \text{ also}$$

$$\sqrt{a-x} = z\sqrt{x-b}$$

Dadurch geht die Gleichung über in

$$\frac{(z+1)^2}{z-1}\sqrt{x-b} = \sqrt{c}, \text{ oder}$$

(2) $$\frac{(z+1)^4}{(z-1)^2}(x-b) = c$$

Jetzt ist noch $x-b$ durch z auszudrücken. Aus (1) folgt durch Quadriren und corr. Addition

$$\frac{a-b}{x-b} = z^2+1$$

$$x-b = \frac{a-b}{z^2+1}$$

Dies eingesetzt, erhält man aus (2)

(3) $$\frac{(z+1)^4}{(z-1)^2(z^2+1)} = \frac{c}{a-b},$$

aus welcher Gleichung z leicht nach den in 394. ff. und 404. ff. gegebenen Methoden zu bestimmen ist. Hat man z, so folgt aus (1)

$$x = \frac{a+bz^2}{1+z^2}.$$

STAATSBIBLIOTHEK BAMBERG

Auch dieser Weg ist für Buchstabengleichungen sehr umständlich, weniger bei Zahlengleichungen, lässt aber bei keiner der nachfolgenden Aufgaben im Stiche.

Specielle, nicht so allgemeine Methoden führen meistens weit schneller zum Ziele. Eine der folgenden 4 Methoden wird bei den bis 492. gegebenen Aufgaben auch immer anwendbar sein und sehr schnell die einfachste Form des Resultats liefern.

c. Man sucht zunächst, wie in 376. b. das Product $(a - x)$ $(x - b)$, so hier das Product $\sqrt{(a - x)\,(x - b)}$, setzt dies also gleich einer neuen Unbekannten p, dass man hat

$$\sqrt{(a - x)\,(x - b)} = p. \tag{4}$$

Führt man links oben in der Gleichung das Quadrat aus und quadrirt dann noch einmal, so hat man

$$\frac{(a - b + 2p)^2}{a - b - 2p} = c.$$

Daraus

$$p = \frac{-2(a - b) - c + r}{4} \text{ für } r = \sqrt{8(a - b)\,c + c^2}$$

Dies in (4) für p gesetzt, quadrirt und x in der gewöhnlichen Weise bestimmt, giebt für x die oben angegebene Form der Lösung.

d. Um die Gleichung (3) aufzulösen, hätte man nach 394. (11) zu setzen

$$z = \frac{t + 1}{t - 1},$$

d. h. wegen (1)

$$\sqrt{\frac{a - x}{x - b}} = \frac{t + 1}{t - 1} \tag{5}$$

Um eine solche Substitution einzuführen und alle in der Gleichung vorkommenden Grössen leicht durch t auszudrücken, setze man

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{a - x} = \lambda\,(t + 1) \\ \sqrt{x - b} = \lambda\,(t - 1) \end{array}\right] \tag{6}$$

Um das λ schliesslich wieder herauszuschaffen und nur eine Gleichung für t zu erhalten, muss man λ durch t ausdrücken oder die Gleichung zwischen λ und t suchen, also aus (6) x eliminiren. Quadrirt und addirt, kommt

$$a - b = 2\lambda^2\,(t^2 + 1) \tag{7}$$

Die gegebene Gleichung geht durch (6) über in

$$2\lambda t^2 = \sqrt{c}, \text{ oder}$$
$$4\lambda^2 t^4 = c$$

Dies mit (7) multiplicirt, fällt λ heraus und man erhält

$$2(a-b)\,t^4 = c\,(t^2+1)$$

$$(8) \qquad t = \sqrt{\frac{r+c}{4(a-b)}} = \sqrt{\frac{2c}{r-c}} \quad (r \text{ wie oben}).$$

Dann folgt aus (5) durch Quadriren und corr. Add.

$$(9) \qquad \frac{a+b-2x}{a-b} = \frac{2t}{t^2+1}$$

Damit ist x schon gefunden; denn t ist durch (8) bestimmt. Soll nun aber bei der Substitution von (8) in (9) auch das r im Nenner verschwinden, so hat man nach 394. e. mit Anwendung des Correspondenzsatzes aus den beiden Formeln für t in (8) zu bilden

$$t = \sqrt{\frac{r-c}{4(a-b)+c-r}}$$

und dies in (9) einzusetzen. Das giebt

$$\frac{a+b-2x}{a-b} = \frac{\sqrt{(4(a-b)+c-r)(r-c)}}{2(a-b)}$$

und daher x, wie oben angegeben.

Da r einen Factor c enthält, so wird nach 406. wegen der Gleichung (3) sich z, mithin auch grösstentheils x selber, durch r und c allein darstellen lassen. Man hat für (9) nur die 2. Formel für t in (8) zu benutzen. Das giebt

$$\frac{a+b-2x}{a-b} = \frac{2(r-c)}{r+c}\sqrt{\frac{2c}{r-c}} = \frac{(r-c)^2}{4(a-b)\,c}\sqrt{\frac{2c}{r-c}}$$
$$= \frac{1}{2(a-b)}\sqrt{\frac{(r-c)^3}{2c}}$$

$$(10) \qquad x = \frac{a+b}{2} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{(r-c)^3}{2c}}$$

e. Man setze nach 376. (1)

$$(11) \qquad \begin{bmatrix} a-x = n+z \\ x-b = n-z \end{bmatrix}$$

Dadurch geht die gegebene Gleichung über in

$$\frac{(\sqrt{n+z}+\sqrt{n-z})^2}{\sqrt{n+z}-\sqrt{n-z}} = \sqrt{c}$$

Nach Fortschaffung der Wurzeln kommt

$$(12)\quad 4z^4 + (12nc + c^2)\,z^2 = 16n^3c, \text{ also}$$

$$(13)\quad z^2 = \frac{-(12nc + c^2) \pm (4n + c)\sqrt{16nc + c^2}}{8}$$

Aus (11) hat man

$$n = \frac{a-b}{2} \qquad x = \frac{a+b}{2} - z$$

Daher geht (13) über in

$$z^2 = \frac{-6(a-b)c - c^2 \pm (2(a-b)+c)\,r}{8}$$

und mithin

$$(14)\quad x = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{-6(a-b)c - c^2 \pm (2(a-b)+c)\,r}{8}}$$

Löst man in der oben für x gegebenen Formel das Product unter der Wurzel auf und setzt für r^2 seinen Werth $8(a-b)c + c^2$, so erhält man (14).

Diese Methode der Auflösung ist für numerische Gleichungen sehr anwendbar, liefert aber für Buchstabengleichungen meistens verwickeltere Formeln als die in c. und d. mitgetheilten Methoden. Auch wird der Radicand von r meistens nicht in der einfachsten Form erscheinen. So ist für (12) und (13) nicht sogleich zu übersehen, dass

$$(12nc + c^2)^2 + 256n^3c = (4n + c)^2\,(16nc + c^2)$$

ist, also noch einen quadratischen Factor enthält, den man vor die Wurzel ziehen kann.

f. Dass man hier auch den in 319. d. angegebenen Weg einschlagen kann, liegt auf der Hand, und das ist wohl im Grunde der allgemeinste und sicherste Weg. Er hat auch den grossen Vorzug, dass er alle in der Gleichung vorkommenden Wurzelgrössen sogleich fortschafft und die Natur der Gleichung am deutlichsten erkennen lässt. Da aber die Methoden zur Auflösung der Gleichungen mit mehreren Unbekannten erst später folgen, so ist dieser Weg zur Auflösung der folgenden Aufgaben nicht weiter angewendet.

446. $\dfrac{(x + \sqrt{a - x^2})^2}{x - \sqrt{a - x^2}} = \sqrt{c}$

L. $x = \sqrt{\dfrac{r - c}{8}} + \sqrt{\dfrac{4a + c - r}{8}}$ für $r = \sqrt{8ac + c^2}$

Man bestimme nach 445. c. zunächst das Product der vorkommenden Grössen, $x\sqrt{a - x^2}$. Man findet

$$x\sqrt{a-x^2} = -\frac{2a+c-r}{4}$$

Diese Gleichung ist, um die oben angegebene Form für x zu erhalten, weiter zu lösen nach 261.

447. $\frac{1}{\sqrt{11-x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{4}{3}$

L. $x = 10,\ 2,\ 6 + \frac{5}{8}\sqrt{55}$

Die Auflösung nach 445. c. ist hier wohl am einfachsten.

448. $(a-x)\sqrt{\frac{a-x}{x-b}} + (x-b)\sqrt{\frac{x-b}{a-x}} = c$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{4\,(a-b)^2 - (c-r)^2}$

für $r = \sqrt{8\,(a-b)^2 + c^2}$

449. $\frac{(a-x)\sqrt{a-x} + (x-b)\sqrt{x-b}}{(a-x)\sqrt{a-x} - (x-b)\sqrt{x-b}} = c \cdot \frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}}$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{4\,(c-1)}\sqrt{4\,(c-1)^2 - (c+1-r)^2}$

für $r = \sqrt{(c+1)^2 + 8\,(c-1)^2}$

Man wendet auch hier, indem man mit den Nennern heraufmultiplicirt, die in 445. c. gegebene Methode an. Das giebt für $\sqrt{(a-x)\,(x-b)} = p$ leicht die Gleichung

$$\frac{(a-b)^2 + (a-b)\,p - 2p^2}{(a-b)^2 - (a-b)\,p - 2p^2} = c$$

450. $\frac{a-x}{x-b}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}} = \frac{m\sqrt{a-x} - n\sqrt{x-b}}{n\sqrt{a-x} - m\sqrt{x-b}}$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{4n}\sqrt{4n^2 - (m-r)^2}$ für $r = \sqrt{m^2 + 8n^2}$

Diese Gleichung ist von der vorigen nicht verschieden, wenn man $\frac{m+n}{m-n} = c$ setzt. Man übersieht das sofort, wenn man auf 450. corr. Add. anwendet.

451. $\frac{(a-x)^2 + (x-b)^2}{(\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b})^4} = c$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{4c+2}\sqrt{2c - 1 + 4cr},\ r = \sqrt{2c+2}$

452. $\frac{x^4 + (4-x^2)^2}{(x+\sqrt{4-x^2})^2} = ax\sqrt{4-x^2}$

L. $x = \sqrt{\frac{a+2+r}{2a+2}} + \sqrt{\frac{3a+2-r}{2a+2}},\ r = \sqrt{a^2+8a+8}$

453. $$\frac{(a-x)^2\sqrt{a-x}+(x-b)^2\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=c$$

L. $x=\frac{a+b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2(a-b)r-r^2}$, $r=\sqrt{5(a-b)^2-4c}$

Die Division des Nenners in den Zähler links giebt zunächst $(a-b)^2-(a-b)\sqrt{(a-x)(x-b)}-(a-x)(x-b)=c$, woraus $\sqrt{(a-x)(x-b)}$ hinzuschreiben ist.

454. $$\frac{x^5+(a-x^2)^2\sqrt{a-x^2}}{x+\sqrt{a-x^2}}=c$$

L. $x=\frac{\sqrt{r}+\sqrt{2a-r}}{2}$, $r=\sqrt{5a^2-4c}$

455. $$\frac{(a-x)^2\sqrt{a-x}+(x-b)^2\sqrt{x-b}}{(a-x)^2\sqrt{x-b}+(x-b)^2\sqrt{a-x}}=c$$

L. $x=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2c-2}\sqrt{(2c-r)(r-2)}$, $r=\sqrt{c^2-2c+5}$

456. $$\frac{(a-x)^2\sqrt{a-x}+(b-x)^2\sqrt{b-x}}{(a-x)\sqrt{a-x}-(b-x)\sqrt{b-x}}=c$$

L. $x=\frac{a+b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a-b)(r-c)(3c-2(a-b)+r)}{4c-5(a-b)}}$,

$r=\sqrt{5(a-b)^2-14(a-b)c+9c^2}$

Die Bestimmung des Productes $(a-x)(b-x)=p$ nach 445. c. führt hier zu umständlichen Rechnungen. Man müsste mit dem Nenner nach rechts gehen, die Glieder mit $\sqrt{a-x}$ und die mit $\sqrt{b-x}$ zusammenziehen und quadriren. Man erhält da schliesslich

$$p=\frac{a-b}{2}\cdot\frac{3c^2-8(a-b)c+5(a-b)^2+(c-a+b)r}{4c-5(a-b)},$$

woraus erst x selber zu bestimmen ist. — Der einfachste Weg ist hier der in 445. d. erörterte. Man setzt also

(1) $$\left[\begin{array}{l}\sqrt{a-x}=\lambda(t+1)\\ \sqrt{b-x}=\lambda(t-1)\end{array}\right]$$

Dadurch geht die gegebene Gleichung über in

(2) $$\frac{(t+1)^5+(t-1)^5}{(t+1)^3-(t-1)^3}=\frac{c}{\lambda^2}$$

Aus der Substitution folgt

$$a-b=4\lambda^2 t$$

Dies mit (2) combinirt, dass λ^2 herausgeht, ergiebt sich

$$\frac{t^4 + 10t^2 + 5}{3t^2 + 1} = \frac{4c}{a - b}$$

$$(a - b)\, t^4 - 2\left(6c - 5\,(a - b)\right) t^2 = 4c - 5\,(a - b)$$

$$(3)\quad t = \sqrt{\frac{6c - 5\,(a-b) + 2r}{a - b}} = \sqrt{\frac{4c - 5\,(a-b)}{5\,(a-b) - 6c + 2r}},$$

wo r den oben angegebenen Werth hat. Die Substitution ergiebt

$$\frac{a - x}{b - x} = \left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2, \quad \frac{a + b - 2x}{a - b} = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

$$(4)\qquad x = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \cdot \frac{t^2 + 1}{2t}$$

Soll kein r im Nenner vorkommen, so ist für $t^2 + 1$ die 1. Formel in (3), für den Nenner $2t$ die 2. Formel zu benutzen:

$$t^2 + 1 = \frac{2\,(3c - 2\,(a-b) + r)}{a - b}$$

$$\frac{1}{2t} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{5\,(a-b) - 6c + 2r}{4c - 5\,(a-b)}}$$

Die Multiplication dieser beiden Gleichungen giebt $\frac{t^2+1}{2t}$, und somit wird nach (4)

$$x = \frac{a+b}{2} \mp \frac{3c - 2\,(a-b) + r}{2} \sqrt{\frac{5\,(a-b) - 6c + 2r}{4c - 5\,(a-b)}}$$

Bringt man den Factor vor der Wurzel unter dieselbe und bemerkt, dass

$$\left(3c - 2\,(a-b) + r\right)\left(5\,(a-b) - 6c + 2r\right) = (a-b)\,(r-c)$$

ist, so erhält man die oben angegebene Formel für x.

Für numerische Gleichungen ist die Auflösung so gut als beendet, wenn t gefunden ist. Dann ergeben die Gleichungen (1) nach der Elimination von λ leicht x selber, wie in (4) angegeben.

457. $$\frac{(a-x)\sqrt{a-x} + (b-x)\sqrt{b-x}}{(a-x)\sqrt{a-x} - (b-x)\sqrt{b-x}} = \frac{c}{\sqrt{(a-x)\,(b-x)}}$$

L. $$x = \frac{a+b}{2} + \frac{3c + r}{2}\sqrt{\frac{a - b - 6c + 2r}{3\,(a-b) + 4c}},$$

$$r = \sqrt{(a-b)^2 - 2\,(a-b)\,c + 9c^2}$$

458. $$\frac{(a-x)\sqrt{a-x} + (b-x)\sqrt{b-x}}{\left(\sqrt{a-x} - \sqrt{b-x}\right)^3} = \frac{c}{\sqrt{(a-x)\,(b-x)}}$$

L. $$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sqrt{\frac{a - b + 4c}{2r - a + b}}, \quad r = \sqrt{(a-b)^2 + 4\,(a-b)\,c}$$

459. $\dfrac{(\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x})^5}{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}} = c\sqrt{(a-x)(b-x)}$

L. $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{(a-b)(3c+r)}{4\sqrt{2c^2+2cr}}$, $r = \sqrt{16(a-b)c+c^2}$

Man verfahre ganz wie in 456., da findet man zunächst

$$t = \sqrt{\frac{r+c}{2c}} = \sqrt{\frac{8(a-b)}{r-c}}$$

460. $\dfrac{(a-x)^3-(b-x)^3}{(\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x})^4} = c$

L. $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{2r-(a-b)}{6}\sqrt{\dfrac{5(a-b)+4r}{16c-3(a-b)}}$,

$r = \sqrt{(a-b)^2+3(a-b)c}$

461. $\big((a-x)^2\sqrt{a-x}+(b-x)^2\sqrt{b-x}\big)\cdot$
$(\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x})^5 = c$

L. $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2\sqrt{2r-r^2}}$, $r = \sqrt{\dfrac{5(a-b)^5}{4c+(a-b)^5}}$

Auch hier wird der in 456. eingeschlagene Weg am einfachsten zum Ziele führen. Man findet

$$t = \sqrt{\frac{r}{2-r}}$$

462. $\dfrac{(5-x)^2\sqrt{2-x}-(2-x)^2\sqrt{5-x}}{(\sqrt{5-x}+\sqrt{2-x})^3} = \dfrac{14}{27}$

L. $x = 6,\ 1,\ \frac{7}{2} \pm \frac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{-19}}$

Man findet hier zunächst $t = \pm 3,\ \pm\dfrac{3}{\sqrt{-19}}$.

---

463. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a-x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-b}} = \dfrac{1}{c}\sqrt[3]{(a-x)(x-b)}$

L. $x = \dfrac{a+b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2-6c^2-2cr}$,

$r = \sqrt{4(a-b)c+9c^2}$

Kubirt man, so erhält man eine quadratische Gleichung für $(a-x)(x-b) = p$. — Auch hier kann man den irrationalen Theil durch r und c allein ausdrücken. Man erhält

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{r+c}{8c}\sqrt{(r+3c)(r-5c)}$$

464. $$\frac{(a-x)\sqrt[3]{x-b}+(x-b)\sqrt[3]{a-x}}{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}}=c$$

L. $$x=\frac{a+b}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(a-b-2c)\,(3c+r)},$$

$$r=\sqrt{(a-b)^2-2\,(a-b)\,c+9c^2}$$

Der einfachste Weg ist hier wohl der in 445. e. angegebene. Setzt man

$$(1)\quad a-x=n+z \qquad x-b=n-z,$$

so folgt aus der gegebenen Gleichung leicht

$$\frac{n+z}{n-z}=\left(\frac{z+(n-c)}{z-(n-c)}\right)^3$$

Hieraus durch corr. Add.

$$\frac{n}{z}=\frac{z^3+3\,(n-c)^2\,z}{3\,(n-c)\,z^2+(n-c)^3}$$

$$z^4-3c\,(n-c)\,z^2=n\,(n-c)^3$$

Diese Gleichung liefert z. Dann sind statt n und z wieder a, b und x aus (1) einzuführen, so hat man die oben angegebene Lösung.

465. $$\frac{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}}{\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{x-b}}=\frac{a+b-2x}{c}$$

L. $$x=\frac{a+b}{2}+\tfrac{1}{4}\sqrt{6\,(a-b-c)\,c+2cr},$$

$$r=\sqrt{9\,(a-b-c)^2+4\,(a-b)\,c}$$

Die Auflösung ist hier ganz wie in 464., nur setzt man hier besser

$$a-x=\tfrac{1}{2}\,(n+z) \qquad x-b=\tfrac{1}{2}\,(n-z).$$

Die gegebene Gleichung geht dadurch über in

$$\frac{n+z}{n-z}=\left(\frac{z+c}{z-c}\right)^3 \text{ u. s. w.}$$

466. $$\frac{\sqrt[3]{(a-x)^2}+\sqrt[3]{(x-b)^2}}{\sqrt[3]{(a-x)^2}-\sqrt[3]{(x-b)^2}}=\frac{c}{a+b-2x}$$

L. $$x=\frac{a+b}{2}+\tfrac{1}{4}\sqrt{(a-b+c-r)\,(3c-a+b+r)}$$

$$r=\sqrt{(a-b)^2-10\,(a-b)\,c+9c^2}$$

Für eine numerische Gleichung dieser Art würde der in 464. und 465. befolgte Weg wiederum der einfachste sein. Man würde kommen auf

$$\left(\frac{n+z}{n-z}\right)^2 = \left(\frac{c+z}{c-z}\right)^3,$$

woraus durch corr. Addition

$$\frac{n^2+z^2}{2nz} = \frac{c^3+3cz^2}{3c^2z+z^3} \text{ u. s. w.}$$

Die Formel für x wird aber bei Buchstaben complicirter als nöthig; auch erhält man für r nicht direct den einfachsten Radicanden.

Der in 445. d. angegebene Weg ist zwar etwas weitläufiger, liefert aber immer die einfachste Form des Resultats und führt direct auf den einfachsten Radicanden. Man hat darnach

$$(1) \quad \sqrt[3]{a-x} = \lambda(t+1) \qquad \sqrt[3]{x-b} = \lambda(t-1)$$

$$\frac{a-x}{x-b} = \left(\frac{t+1}{t-1}\right)^3$$

$$(2) \quad \frac{a+b-2x}{a-b} = \frac{3t^2+1}{t^2+3} \cdot \frac{1}{t}$$

Wegen (1) geht die gegebene Gleichung über in

$$\frac{(t+1)^2+(t-1)^2}{(t+1)^2-(t-1)^2} = \frac{\cdot c}{a-b} \cdot \frac{(t+1)^3+(t-1)^3}{(t+1)^3-(t-1)^3}$$

$$\frac{t^2+1}{2t} = \frac{c}{a-b} \cdot \frac{t(t^2+3)}{3t^2+1}$$

Hieraus ist t zu bestimmen. Man findet

$$(3) \quad t = \sqrt{\frac{3c-2(a-b)+r}{3(a-b)-2c}} = \sqrt{\frac{a-b}{3c-2(a-b)-r}}$$

Soll nun bei der Substitution von t in (2) das r im Nenner verschwinden, so hat man wegen t^2+3 nach 394. e. mit Anwendung des Correspondenzsatzes (283. d.) aus den in (3) für t gefundenen Formeln abzuleiten

$$t = \sqrt{\frac{9c-5(a-b)+3r}{7(a-b)-3c-r}}$$

Dann wird

$$\frac{3t^2+1}{t^2+3} = \frac{3c-(a-b)+r}{2(a-b)}$$

Hiernach und für $\frac{1}{t}$ die 2. Formel in (3) benutzt, hat man wegen (2)

$$(4) \quad \frac{a+b-2x}{a-b} = \frac{3c-(a-b)+r}{2(a-b)} \sqrt{\frac{3c-2(a-b)-r}{a-b}}$$

Bringt man den Factor unter die Wurzel, beachtet, dass

$$(3c-(a-b)+r)(3c-2(a-b)-r) = (a-b)(a-b+c-r)$$

ist und hebt $a - b$ im Nenner fort, so folgt aus (4) die oben angegebene Lösung.

Für eine numerische Gleichung war die Auflösung mit (3) schon beendigt. Denn ist t gefunden, so liefert die Gleichung (2) sofort x selber. Kommt es aber bei der vorgelegten Buchstabengleichung darauf an, für x eine möglichst einfache Form zu finden, so führt der angegebene Weg am sichersten und schnellsten zum Ziele.

467. $$\frac{\sqrt[3]{(a-x)^2} + \sqrt[3]{(x-b)^2}}{\sqrt[3]{(a-x)^2} - \sqrt[3]{(x-b)^2}} = \frac{a+b-2x}{c}$$

L. $$x = \frac{a+b}{2} + \frac{3(a-b) - c + r}{4}\sqrt{\frac{2c - 3(a-b) + r}{2(a-b) - 3c}}$$

$$r = \sqrt{9(a-b)^2 - 10(a-b)c + c^2}$$

468. $$\frac{(a-x)\sqrt[3]{a-x} + (x-b)\sqrt[3]{x-b}}{(a-x)\sqrt{x-b} + (x-b)\sqrt[3]{a-x}} = c$$

L. $$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2c+2}\sqrt{(c-1)(r+3)}, \quad r = \sqrt{c^2+8}$$

469. $$\frac{(a-x)\sqrt[3]{x-b} + (x-b)\sqrt[3]{a-x}}{\left(\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{x-b}\right)^4} = c$$

L. $$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \frac{(3c-r)\sqrt{r}}{9c-1}, \quad r = \sqrt{1-8c}$$

Man findet hier zunächst

$$t = \frac{1}{\sqrt{r}}, \text{ so dass } \sqrt[3]{\frac{a-x}{x-b}} = \frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}} \text{ wird.}$$

470. $$\frac{\left(\sqrt[3]{(a-x)^2} + \sqrt[3]{(a-x)(x-b)} + \sqrt[3]{(x-b)^2}\right)^2}{\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{x-b}} = c$$

L. $$x = \frac{a+b}{2} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(3c+r)(7c-3r)},$$

$$r = \sqrt{9c^2 - 8(a-b)c}$$

471. $$(a-x)\sqrt[3]{\frac{a-x}{x-b}} + (x-b)\sqrt[3]{\frac{x-b}{a-x}} = c$$

L. $$x = \frac{a+b}{2} + \frac{2(a-b) - c + r}{2}\sqrt{\frac{c - 5(a-b) + 2r}{5(a-b) + 3c}},$$

$$r = \sqrt{5(a-b)^2 - 2(a-b)c + c^2}$$

Kubirt man, so giebt das

$$\frac{(a-x)^4}{x-b} + 3c(a-x)(x-b) + \frac{(x-b)^4}{a-x} = c^3$$

Setzt man also $(a - x)(x - b) = p$, so erhält man mit Benutzung von 376. 3. leicht die Gleichung

$$(5(a - b) + 3c)\,p^2 - (5(a - b^3) + c^3)\,p + (a - b)^5 = 0$$

Daraus ist p zu bestimmen und dann ist auch x leicht gefunden. Für eine Buchstabengleichung wird jedoch der Ausdruck für x sehr complicirt; auch enthält der Radicand von r noch den quadratischen Factor $((a - b)^2 - (a - b)\,c - c^2)^2$, was man schwerlich auf diesem Wege erkennen würde. Der in 445. d. oder 466. befolgte Weg ist derjenige, welcher die einfachste Form des Resultates liefert.

472. $$\frac{(\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{b+x})^5}{\sqrt[3]{(a-x)^2} + \sqrt[3]{(b+x)^2}} = c$$

$$\text{L. } x = \frac{a-b}{2} + \frac{3(a+b) + c + r}{18}\sqrt{\frac{r - 2c}{3c}},$$

$$r = \sqrt{24(a + b)\,c + c^2}$$

473. $$(\sqrt[3]{a - x} + \sqrt[3]{b + x})^5 = c\sqrt[3]{(a - x)(b + x)}$$

$$\text{L. } x = \frac{a-b}{2} + \frac{3(a+b) + c + r}{18}\sqrt{\frac{c - 2r}{3c}},$$

$$r = \sqrt{c^2 - 12(a + b)\,c}$$

474. $$\frac{\sqrt[3]{(a - x)^2} - \sqrt[3]{(b - x)^2}}{\sqrt[3]{a + b - 2x}} = \sqrt[3]{c}$$

$$\text{L. } x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b+2c}{6}\sqrt{\frac{4(a-b) - c}{3c}}$$

$$+ \frac{a - b - c}{3}\sqrt{\frac{a-b-c}{3c}}$$

Man setze nach 376. (6.) oder 445. (11.)

$$a - x = z + n \qquad b - x = z - n,$$

so geht die gegebene Gleichung über in

$$\sqrt[3]{(z + n)^2} - \sqrt[3]{(z - n)^2} = \sqrt[3]{2cz},$$

welche Gleichung in 352. gelöst ist.

Für $a = 9$, $b = 2$ und $c = 3$ erhält man

$$x = \frac{99 \pm 65 \pm 16}{18}.$$

Es gelten alle Zeichenverbindungen, also

$$x = \frac{99 + 65 \pm 16}{18}, \qquad \frac{99 - 65 \pm 16}{18}$$

$$x_1 = 10, \quad x_2 = \frac{74}{9}, \quad x_3 = \frac{25}{9}, \quad x_4 = 1$$

475. $\frac{a-x}{\sqrt[3]{(x-b)^2}} + \frac{x-b}{\sqrt[3]{(a-x)^2}} = c\left(\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{x-b}\right)$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \frac{c+2+r}{c+1} \sqrt{\frac{c+5-2r}{c-5}}$,

$r = \sqrt{4c+5}$

---

476. $\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{x-b} = \sqrt[4]{c}$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{r-c}{2} \sqrt{\frac{2r-3c}{c}}$, $r = \sqrt{2(a-b)c + 2c^2}$

a. Man kommt am schnellsten zum Ziele, wenn man nach der Formel 376. 2.

$$(u+v)^4 = u^4 + v^4 + 4(u+v)^2 uv - 2u^2v^2$$

zur 4. Potenz erhebt. Das giebt für

$$\sqrt[4]{(a-x)(x-b)} = p$$

die Gleichung

$$c = a - b + 4p\sqrt{c} - 2p^2$$

$$p = \frac{2\sqrt{c} \mp \sqrt{2(a-b)+2c}}{2} = \frac{2c-r}{2\sqrt{c}}$$

$$(a-x)(x-b) = \frac{(2c-r)^4}{16c^2}$$

Hieraus ergiebt sich x mit Benutzung von $2(a-b)c = r^2 - 2c^2$ in der oben angegebenen Form.

b. Eine zweite sehr einfache Methode, zur Lösung zu gelangen, ist, die Differenz derjenigen Wurzelgrössen zu suchen, deren Summe gegeben ist (s. 302. und 307.). Man setzt also

$$(1) \qquad \sqrt[4]{a-x} - \sqrt[4]{x-b} = z$$

Dies combinirt mit der gegebenen Gleichung, liefert

$$(2) \qquad \left[\begin{array}{l} 2\sqrt[4]{a-x} = \sqrt[4]{c} + z \\ 2\sqrt[4]{x-b} = \sqrt[4]{c} - z \end{array}\right]$$

Jetzt zur 4. Potenz erhoben, erhält man durch Addition und Subtraction

$$\left[\begin{array}{l} 8(a-b) = c + 6z^2\sqrt{c} + z^4 \\ a+b-2x = \frac{1}{2}z\left(z^2+\sqrt{c}\right)\sqrt[4]{c} \end{array}\right]$$

Die erste Gleichung liefert z. Das ist in die letzte einzusetzen.

Dass man auch nach den in 445. angegebenen Methoden zum Ziele kommt, ist leicht begreiflich.

477. $$\frac{(a-x)\sqrt[4]{a-x}+(x-b)\sqrt[4]{x-b}}{\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b}}=c$$

L. $$x=\frac{a+b}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(2c-(a-b))\,(5\,(a-b)-6c+2r)}$$

$$r=\sqrt{5\,(a-b)^2-12\,(a-b)\,c+8c^2}$$

Der kürzeste Weg ist hier wohl der in 464. angegebene.

478. $$\frac{(a-x)\sqrt[4]{x-b}+(x-b)\sqrt[4]{a-x}}{\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b}}=c$$

L. $$x=\frac{a+b}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(a-b-2c)\,(6c-a+b+2r)}$$

$$r=\sqrt{(a-b)^2-4\,(a-b)\,c+8c^2}$$

479. $$\frac{(a-x)\sqrt[4]{a-x}+(x-b)\sqrt[4]{x-b}}{(a-x)\sqrt[4]{x-b}+(x-b)\sqrt[4]{a-x}}=c$$

L. $$x=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2(c+1)}\sqrt{(2+r)\,(2c-r)},\quad r=\sqrt{c^2-2c+5}$$

Hebt man links durch $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b}$, so ergiebt sich nach einigen leichten Reductionen für $(a-x)\,(x-b)=p$ die Gleichung

$$(c+1)^2\,p+(a-b)\,(c^2-1)\sqrt{p}=(a-b)^2$$

480. $$\frac{\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b}}{\sqrt[4]{a-x}-\sqrt[4]{x-b}}=\frac{c}{a+b-2x}$$

L. $$x=\frac{a+b}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2-(c-r)^2},$$

$$r=\sqrt{(a-b)^2-2\,(a-b)\,c+2c^2}$$

481. $$\frac{(a-x)\sqrt[4]{b-x}+(b-x)\sqrt[4]{a-x}}{\sqrt[4]{a-x}-\sqrt[4]{b-x}}=c$$

L. $$x=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b+2c}{2}\sqrt{\frac{a-b-4c+2r}{3\,(a-b)+8c}},$$

$$r=\sqrt{(a-b)^2+4c^2}$$

482. $$\frac{(a-x)\sqrt[4]{a-x}+(b-x)\sqrt[4]{b-x}}{\sqrt[4]{a-x}-\sqrt[4]{b-x}}=c$$

L. $$x=\frac{a+b}{2}+\frac{2c-a+b}{2}\sqrt{\frac{5\,(a-b)-4c+2r}{8c-5\,(a-b)}},$$

$$r=\sqrt{5\,(a-b)^2-8\,(a-b)\,c+4c^2}$$

483. $\dfrac{(\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x})^5}{\sqrt[4]{a-x}-\sqrt[4]{b-x}} = c$

L. $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{4(a-b)-3c+5r}{32}\sqrt{\dfrac{r-c}{2c}}$,

$r = \sqrt{8(a-b)c+c^2}$

a. Die Auflösung geschieht hier wohl am besten auf dem Wege, welcher in 445. d. für die Quadratwurzel und in 466. für die Kubikwurzel angegeben ist. Man setzt

(1) $\sqrt[4]{a-x} = \lambda(t+1)$ $\sqrt[4]{b-x} = \lambda(t-1)$

Daraus ergiebt sich zunächst

(2) $a+b-2x = 2\lambda^4(t^4+6t^2+1)$
$a-b = 8\lambda^4(t^2+1)t$, also auch

(3) $\dfrac{a+b-2x}{a-b} = \dfrac{t^4+6t^2+1}{4(t^2+1)}\cdot\dfrac{1}{t}$

Die gegebene Gleichung geht durch (1) und (2) über in

(4) $2(a-b)t^4 = c(t^2+1)$

Daraus

(5) $t = \sqrt{\dfrac{r+c}{4(a-b)}} = \sqrt{\dfrac{2c}{r-c}}$

Mit Hülfe der 2. Formel für t ergiebt sich x direct aus (3).

b. Hätte man für t nicht eine so einfache Formel, wie hier die 2. ist, so wäre die Substitution in (3) weitläufig. Man eliminirt dann am besten erst mit Hülfe von (4) aus (3) die 4. Potenz von t, schreibt also

(6) $a+b-2x = \frac{1}{8}\left(c+2(a-b)\dfrac{6t^2+1}{t^2+1}\right)\dfrac{1}{t}$

Soll das r bei der Substitution im Nenner verschwinden, so hat man aus (5) nach dem Correspondenzsatz (283.) zu bilden

$t = \sqrt{\dfrac{r-c}{4(a-b)+c-r}}$ (394. e.)

Hierdurch wird

$\dfrac{6t^2+1}{t^2+1} = \dfrac{4(a-b)-5c+5r}{4(a-b)}$

Dazu aus (5)

$\dfrac{1}{t} = \sqrt{\dfrac{r-c}{2c}}$,

geht (6) über in

$a+b-2x = \dfrac{4(a-b)-3c+5r}{16}\sqrt{\dfrac{r-c}{2c}}$

und mithin x, wie oben angegeben. — Dies ist der allgemeine Weg, für x die einfachste Form zu erhalten.

484. $(a-x)\sqrt[4]{\frac{a-x}{b-x}} - (b-x)\sqrt[4]{\frac{b-x}{a-x}} = c$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \frac{3c-r}{\sqrt{(r+c)(5c-3r)}}$,

$r = \sqrt{4(a-b)^2 + c^2}$

Man schlage den Weg in 483. ein. Indem man t durch r und c allein ausdrückt, findet man

$$t = \sqrt{\frac{\sqrt{r+c} + 2\sqrt{r-c}}{\sqrt{r+c} - 2\sqrt{r-c}}}$$

Diese Formel ist zu benutzen in

$$\sqrt[4]{\frac{a-x}{b-x}} = \frac{t+1}{t-1}$$

Quadrirt man, so giebt das

$$\sqrt{\frac{a-x}{b-x}} = \frac{\sqrt{r+c} + \sqrt{5c-3r}}{\sqrt{r+c} - \sqrt{5c-3r}}$$

Jetzt noch einmal quadrirt und dann corr. Add. angewendet, giebt

$$\frac{a+b-2x}{a-b} = \frac{3c-r}{\sqrt{(r+c)(5c-3r)}},$$

mithin x, wie oben angegeben.

Benutzt man andere Formeln für t, so wird der Ausdruck für x sehr complicirt.

Setzt man $a = 19$, $b = 4$, $c = \frac{63}{2}$, so findet man zunächst $r = \pm\frac{87}{2}$, $t = \pm 3, \pm\sqrt{-\frac{2}{3}}$, und mit Hülfe von t oder direct

$$x = 20,\ 3,\ \frac{23}{2} \pm \frac{115}{8}\sqrt{-\frac{3}{2}}$$

485. $\frac{20-x}{\sqrt[4]{5-x}} + \frac{5-x}{\sqrt[4]{20-x}} = \frac{16\frac{1}{2}}{\sqrt[4]{20-x} - \sqrt[4]{5-x}}$

L. $x = 4,\ 21,\ \frac{25}{2} \pm \frac{115}{8}\sqrt{-\frac{3}{2}}$

Man erhält für t zunächst die Gleichung $3t^4 - 25t^2 - 18 = 0$, woraus sich für t dieselben Werthe wie in 484. ergeben.

486. $\sqrt[5]{a-x} + \sqrt[5]{x-b} = \sqrt[5]{c}$

L. $x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b-c+r}{10}\sqrt{\frac{2r-5c}{5c}}$, $r = \sqrt{20(a-b)c+5c^2}$

Man verfahre ähnlich, wie in 476.

487. $$\frac{(a-x)\sqrt[5]{a-x}-(x-b)\sqrt[5]{x-b}}{\sqrt[5]{a-x}-\sqrt[5]{x-b}}=c$$

L. $$x=\frac{a+b}{2}+\frac{2c-a+b}{2}\sqrt{\frac{5(a-b)-5c+2r}{5c-3(a-b)}}$$

$$r=\sqrt{4(a-b)^2-8(a-b)c+5c^2}$$

Der einfachste Weg zur Lösung zu gelangen ist wohl der in 445. e. angegebene.

488. $$\frac{(a-x)\sqrt[5]{x-b}-(x-b)\sqrt[5]{a-x}}{\sqrt[5]{a-x}-\sqrt[5]{x-b}}=c$$

L. $$x=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b+2c}{2}\sqrt{\frac{2r-5c}{2(a-b)+5c}}$$

$$r=\sqrt{(a-b)^2+2(a-b)c+5c^2}$$

489. $$\sqrt[5]{(a-x)^3}+\sqrt[5]{(x-b)^3}=\frac{c}{\sqrt[5]{(a-x)x-b)}}$$

L. $$x=\frac{a+b}{2}+\frac{3c+r}{2}\sqrt{\frac{a-b-5c+2r}{3(a-b)+5c}}$$

$$r=\sqrt{(a-b)^2-2(a-b)c+5c^2}$$

Der in 445. d. oder 466. oder 483., insonderheit 483. b. mitgetheilte Weg wird hier wohl am einfachsten zur Lösung führen. Dasselbe gilt von den 3 folgenden Aufgaben. Man wird also zu setzen haben

$$\sqrt[5]{a-x}=\lambda(t+1) \qquad \sqrt[5]{x-b}=\lambda(t-1)$$

490. $$\left(\sqrt[5]{a-x}-\sqrt[5]{x-b}\right)^3\left(\sqrt[5]{(a-x)^2}-\sqrt[5]{(x-b)^2}\right)=c$$

L. $$x=\frac{a+b}{2}+\frac{5(a-b)+11c-5r}{2}\sqrt{\frac{c}{2r-5c}}$$

$$r=\sqrt{4(a-b)c+5c^2}$$

Die einfachste Formel für t wird hier

$$t=\sqrt{\frac{2r-5c}{c}}.$$

Diese ist zu benutzen.

491. $$\left(\sqrt[5]{(a-x)^2}-\sqrt[5]{(x-b)^2}\right)^2\left(\sqrt[5]{a-x}+\sqrt[5]{x-b}\right)=c$$

L. $$x=\frac{a+b}{2}+\frac{13(a-b)-5c+3r}{10}\sqrt{\frac{8(a-b)-5c-2r}{5c}}$$

$$r=\sqrt{16(a-b)^2-20(a-b)c+5c^2}$$

492. $$\frac{\left(\sqrt[5]{(a-x)^3}+\sqrt[5]{(x+b)^3}\right)^2}{\sqrt[5]{a-x}+\sqrt[5]{x+b}}=c$$

L. $$x=\frac{a-b}{2}+\frac{4c-(a+b)+2r}{2}\sqrt{\frac{c-r}{5c+3r}}$$

$$r=\sqrt{5c^2-4(a+b)c}$$

Setzt man $a=17$, $b=16$ und $c=27$, so erhält man

$$x=16,\ -15,\ \frac{1}{2}\pm\frac{19}{2}\sqrt{3}.$$

Zweiter Theil.

Gleichungen mit zwei Unbekannten.

A.

Gleichungen meist homogenen Charakters.

Erste Stufe.

1. $\left[\begin{array}{l} \dfrac{ax - by}{cx - dy} = \dfrac{m}{n} \\ x^2 + y^2 = k^2 \end{array}\right]$

L. $x = \dfrac{(bn - dm)\,k}{\sqrt{(bn - dm)^2 + (an - cm)^2}}$, $y = \dfrac{(an - cm)\,k}{\sqrt{(bn - dm)^2 + (an - cm)^2}}$

Um die Rechnung mit Brüchen zu vermeiden, setzt man, da sich aus der 1. Gleichung leicht

$$(1) \qquad \frac{x}{y} = \frac{bn - dm}{an - cm}$$

ergiebt, (wie in I. 445. d.)

$$(2) \qquad x = \lambda\,(bn - dm) \qquad y = \lambda\,(an - cm)$$

in der 2. Gleichung und bestimmt λ. Das giebt:

$$\lambda = \frac{k}{\sqrt{(bn - dm)^2 + (an - cm)^2}}$$

Dann liefern die Gleichungen (2) die Unbekannten selber.

Ist demnach der Quotient der Unbekannten oder das Verhältniss derselben $\frac{x}{y}$, wie hier in (1), bekannt, so hat die Auffindung der Unbekannten selber weiter keine Schwierigkeit, wenn sie überhaupt durch eine quadratische Gleichung möglich ist.

2. $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x + y}{x - y} = \dfrac{a}{b} \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{array}\right]$

L. $x = \dfrac{(a + b)\,c}{\sqrt{2\,(a^2 + b^2)}}$, $y = \dfrac{(a - b)\,c}{\sqrt{2\,(a^2 + b^2)}}$

Man hat aus der 1. Gleichung nach I. 18.

$$\frac{x}{y} = \frac{a+b}{a-b},$$

wird also hier nach der vorigen Aufgabe zu setzen haben

$$x = \lambda\,(a+b) \qquad y = \lambda\,(a-b)$$

Dies in der 2. Gleichung substituirt, liefert λ u. s. w.

Auch in den folgenden 4 Aufgaben hat man aus einer der gegebenen Gleichungen den Quotienten $\frac{x}{y}$ zu bestimmen und dann in derselben Weise zu verfahren.

3. $\left[\begin{matrix} x+y : x-y = a : b \\ a\,x^2 + (a-b)\,xy - b\,y^2 = c^2 \end{matrix}\right]$

L. $x = \frac{(a+b)\,c}{\sqrt{2\,a\,(a^2+b^2)}},\ y = \frac{(a-b)\,c}{\sqrt{2\,a\,(a^2+b^2)}}$

4. $\left[\begin{matrix} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{a}{b} \\ x^2 - y^2 = c^2 \end{matrix}\right]$

L. $x = \frac{(a+b)^2\,c}{2\sqrt{2\,ab\,(a^2+b^2)}},\ y = \frac{(a-b)^2\,c}{2\sqrt{2\,ab\,(a^2+b^2)}}$

Hier findet man aus der 1. Gleichung zunächst $\frac{x}{y} = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$

5. $\left[\begin{matrix} \frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}} = \frac{a}{b} \\ x^3 - c^3 = c^3 - y^3 \end{matrix}\right]$

L. $x = c\sqrt[3]{\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}},\ y = c\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}}$

6. $\left[\begin{matrix} \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = 2\,c\,m^3 \\ \frac{bx+ay}{bx-ay} = c \end{matrix}\right]$

L. $x = \frac{am\,(c+1)}{\sqrt[3]{c^2+3}},\ y = \frac{bm\,(c+1)}{\sqrt[3]{c^2+3}}$

7. $\left[\begin{matrix} x^2 + xy = a \\ y^2 + xy = b \end{matrix}\right]$

L. $x = \frac{a}{\sqrt{a+b}},\ y = \frac{b}{\sqrt{a+b}}$

Die Division der Gleichungen in einander liefert zunächst den Quotienten der Unbekannten. Dann weiter nach 1. oder 2. Man kann schliesslich die 1. Gleichung benutzen, um λ zu be-

stimmen, oder die 2. Gleichung, oder eine Combination aus beiden Gleichungen. So folgt hier aus der Addition der gegebenen Gleichungen

$$(x + y)^2 = a + b$$

Hierin ist zu setzen

$$x = \lambda a \qquad y = \lambda b$$

Das liefert

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{a + b}}$$

In den folgenden Aufgaben wird man ebenfalls mit Hülfe der Division der beiden Gleichungen in einander leicht den Quotienten der Unbekannten bestimmen können.

8. $\begin{bmatrix} x^3 + xy^2 = a \\ y^3 + x^2y = b \end{bmatrix}$

L. $x = \frac{a}{\sqrt[3]{a^2 + b^2}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt[3]{a^2 + b^2}}$

9. $\begin{bmatrix} x^4 + xy^3 = a \\ y^4 + x^3y = b \end{bmatrix}$

L. $x = \frac{a}{\sqrt[4]{a^3 + b^3}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt[4]{a^3 + b^3}}$

10. $\begin{bmatrix} x^2y + xy^2 = a \\ x^2y - xy^2 = b \end{bmatrix}$

L. $x = \frac{a + b}{\sqrt[3]{2\,(a^2 - b^2)}}, \quad y = \frac{a - b}{\sqrt[3]{2\,(a^2 - b^2)}}$

11. $\begin{bmatrix} x = a\,(x^2 + y^2) \\ y = b\,(x^2 + y^2) \end{bmatrix}$

L. $x = 0, \ \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad y = 0, \ \frac{b}{a^2 + b^2}$

12. $\begin{bmatrix} x = a\sqrt{x + y} \\ y = b\sqrt{x + y} \end{bmatrix}$

L. $x = 0, \ a\,(a + b) \qquad y = 0, \ b\,(a + b)$

13. $\begin{bmatrix} x\sqrt{x + y} = a \\ y\sqrt{x + y} = b \end{bmatrix}$

L. $x = \frac{a}{\sqrt[3]{a + b}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt[3]{a + b}}$

14. $\left[\begin{matrix} x + y = a\,(x^2 + y^2) \\ x - y = b\,(x^2 + y^2) \end{matrix}\right]$

L. $x = 0,\ \frac{a+b}{a^2+b^2} \qquad y = 0,\ \frac{a-b}{a^2+b^2}$

15. $\left[\begin{matrix} x + y = a\,(x^2 - y^2) \\ x - y = b\,(x^2 - y^2) \end{matrix}\right]$

L. $x = 0,\ \frac{a+b}{2ab} \qquad y = 0,\ \frac{a-b}{2ab}$

16. $[a\,(x - y) = b\,(x + y) = xy]$

L. $x = 0,\ \frac{2ab}{a-b} \qquad y = 0,\ \frac{2ab}{a+b}$

Man hat zunächst

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{a}{b},\ \text{also}\ \frac{x}{y} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Es ist demnach

$$x = \lambda\,(a + b) \qquad y = \lambda\,(a - b)$$

in einer der andern Gleichungen

$$a\,(x - y) = xy \ \text{oder}\ b\,(x + y) = xy$$

zu setzen und λ zu bestimmen.

17. $[a\,(x - y) = b\,(x + y) = x^2 + y^2]$

L. $x = 0,\ \frac{a^2b + ab^2}{a^2+b^2} \qquad y = 0,\ \frac{a^2b - ab^2}{a^2+b^2}$

18. $\left[\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = x^2 + y^2\right]$

L. $x = 0,\ \frac{a}{a^2+b^2} \qquad y = 0,\ \frac{b}{a^2+b^2}$

19. $[x^2 - y^2 = a\,(x - y) = b\,(x + y)]$

L. $x = 0,\ \frac{1}{2}(a + b) \qquad y = 0,\ \frac{1}{2}(a - b)$

20. $[ay = bx = xy]$

L. $x = 0,\ a \qquad y = 0,\ b$

21. $\left[\begin{matrix} \frac{(a-x)^2 + y^2}{(a-x)\,y} = \frac{13}{6} \\ x - y = m \end{matrix}\right]$

L. $x = \frac{3a+2m}{5},\ \frac{2a+3m}{5} \qquad y = \frac{3}{5}(a - m),\ \frac{2}{5}(a - m)$

Man multiplicire die 1. Gleichung im Nenner mit 2, wende nach I. 18. corr. Add. an und ziehe die Wurzel, so giebt das

$$\frac{a - x + y}{a - x - y} = \pm 5$$

Dies ist mit der 2. Gleichung zu combiniren.

22. $\left[\begin{array}{c} \frac{(a-x)^2+(a-x)\,y+y^2}{(a-x)^2-(a-x)\,y+y^2}=\frac{49}{19} \\ x-y=b \end{array}\right]$

L. $x=\frac{1}{8}(5a+3b),\ \frac{1}{8}(3a+5b)$
$y=\frac{5}{8}(a-b),\ \frac{3}{8}(a-b)$

Wendet man auf die 1. Gleichung corr. Add. an, so ist diese Aufgabe leicht auf die vorige reducirt.

23. $\left[\begin{array}{c} x+y=a \\ \frac{x}{b-y}+\frac{b-y}{x}=\frac{5}{2} \end{array}\right]$

L. $x=2(a-b),\ b-a$
$y=2b-a,\ 2a-b$

Die 2. Gleichung lässt sich ganz so behandeln, wie die 1. Gleichung in 21.

24. $\left[\begin{array}{c} x^2+ay^2=\frac{a+1}{a-1} \\ ax^2+y^2=(a^2-1)\,y \end{array}\right]$

L. $x=\frac{\sqrt{a^2-a-1}}{a-1},\ \frac{\sqrt{a^2-a^3-1}}{a-1}$
$y=\frac{1}{a-1},\ -\frac{a}{a-1}$

Man bestimme y zunächst, indem man x^2 eliminirt. Ist y gefunden, so ist der Werth dafür in der 1. Gleichung zu substituiren.

25. $\left[\begin{array}{c} x+y^2=ax \\ x^2+y=by \end{array}\right]$

L. $x=0,\ \sqrt[3]{(a-1)\,(b-1)^2}\quad y=0,\ \sqrt[3]{(a-1)^2\,(b-1)}$

Man bestimme aus der 1. Gleichung x und substituire das in der 2. Gleichung, oder man bestimme y aus der 2. Gleichung und substituire das in der 1. Gleichung.

26. $\left[\begin{array}{c} x+y^2=ay^2 \\ x^2+y=bx^2 \end{array}\right]$

L. $x=0,\ \frac{1}{\sqrt[3]{(a-1)\,(b-1)^2}}\quad y=0,\ \frac{1}{\sqrt[3]{(a-1)^2\,(b-1)}}$

27. $\left[\begin{array}{c} x^2(1+y+y^2+y^3)=a \\ x^2(1-y+y^2-y^3)=b \end{array}\right]$

L. $x=\frac{a+b}{2}\sqrt{\frac{a+b}{a^2+b^2}},\ y=\frac{a-b}{a+b}$

Man bilde die Summe und die Differenz der gegebenen Gleichungen, so giebt die Division der so erhaltenen Gleichungen durch einander die Unbekannte y.

28. $\begin{bmatrix} x + y = a + b + (a - b)\,xy \\ x - y = a - b + (a + b)\,xy \end{bmatrix}$

L. $x = \dfrac{2ab - 1 \pm \sqrt{4a^2b^2 + 1}}{2b}$ $\quad y = \dfrac{2ab + 1 \mp \sqrt{4a^2b^2 + 1}}{2a}$

Man multiplicire die Summe der gegebenen Gleichungen mit ihrer Differenz, so erhält man

$$xy = ab\,(1 - x^2y^2)$$

Daraus folgt xy, und sein Werth ist in der Summe und in der Differenz der Gleichungen zu substituiren, so erhält man die Unbekannten selber.

29. $\begin{bmatrix} ax + by = cxy \\ a_1x + b_1y = c_1xy \end{bmatrix}$

L. $x = 0,\ \dfrac{ab_1 - a_1b}{ac_1 - a_1c}$ $\quad y = 0,\ \dfrac{ab_1 - a_1b}{cb_1 - c_1b}$

Man dividire die Gleichungen in einander, d. h. eliminire xy, und bestimme das Verhältniss der Unbekannten. Dann weiter nach 1. oder 2. — Auch in den folgenden 4 Aufgaben wird dieser Weg der einfachste und kürzeste sein.

30. $\begin{bmatrix} ax + by = c\ (x^2 + y^2) \\ a_1x + b_1y = c_1\ (x^2 + y^2) \end{bmatrix}$

L. $x = 0,\ \dfrac{(ab_1 - a_1b)\,(cb_1 - c_1b)}{(ac_1 - a_1c)^2 + (cb_1 - c_1b)^2}$

$y = 0,\ \dfrac{(ab_1 - a_1b)\,(ac_1 - a_1c)}{(ac_1 - a_1c)^2 + (cb_1 - c_1b)^2}$

31. $\begin{bmatrix} x = a\ (x^3 + y^3) \\ y = b\ (x^3 + y^3) \end{bmatrix}$

L. $x = 0,\ \dfrac{a}{\sqrt{a^3 + b^3}}$ $\quad y = 0,\ \dfrac{b}{\sqrt{a^3 + b^3}}$

32. $\begin{bmatrix} x\ (x^3 + y^3) = a \\ y\ (x^3 + y^3) = b \end{bmatrix}$

L. $x = \dfrac{a}{\sqrt[4]{a^3 + b^3}},\ y = \dfrac{b}{\sqrt[4]{a^3 + b^3}}$

33. $\begin{bmatrix} x + y = a\ (x^4 + y^4 \\ x - y = b\ (x^4 + y^4 \end{bmatrix}$

L. $x = 0,\ \dfrac{a + b}{\sqrt[3]{a^4 + 6a^2b^2 + b^4}}$ $\quad y = 0,\ \dfrac{a - b}{\sqrt[3]{a^4 + 6a^2b^2 + b^4}}$

34. $\left[\begin{matrix} x^2 + xy + y^2 = 2a \\ x^2 - xy + y^2 = 2b \end{matrix}\right]$

L. $x = \frac{\sqrt{3a-b} + \sqrt{3b-a}}{2} \quad y = \frac{\sqrt{3a-b} - \sqrt{3b-a}}{2}$

Man bestimme durch Addition und Subtraction der Gleichungen zunächst $x^2 + y^2$ und xy, deren Combination dann leicht $(x+y)^2$ und $(x-y)^2$ liefert.

35. $\left[\begin{matrix} \frac{x^3 - y^3}{x - y} = 2a \\ \frac{x^3 + y^3}{x + y} = 2b \end{matrix}\right]$

L. ganz wie in 34.

36. $\left[\begin{matrix} x + y = a \\ x^2 + y^2 = mxy \end{matrix}\right]$

L. $x = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{m-2}{m+2}}\right) \quad y = \frac{a}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{m-2}{m+2}}\right)$

a. Man bestimmt aus der 1. Gleichung eine Unbekannte und substituirt den Werth für dieselbe in der 2. Gleichung. Das giebt für x und für y bezüglich die Gleichungen

$$x^2 + (a-x)^2 = mx(a-x)$$
$$(a-y)^2 + y^2 = my(a-y)$$

Die 1. Gleichung liefert x, die 2. liefert y. — Diese Methode (Substitutionsmethode) ist immer anwendbar, wenn eine der gegebenen Gleichungen wenigstens in Bezug auf eine der Unbekannten eine einfache ist.

b. Man quadrirt die 1. Gleichung, subtrahirt davon die 2. Gleichung, so findet man

$$xy = \frac{a^2}{m+2}$$

Dies mit der 2. Gleichung combinirt, liefert leicht $x - y$ u. s. w.

c. Die einfachste Auflösung ist, aus der 2. Gleichung das Verhältniss der Unbekannten zu bestimmen. Man hat

$\frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{m}{2}$, also nach I. 18. 7.

$$\frac{x-y}{x+y} = \sqrt{\frac{m-2}{m+2}}$$
$$x - y = a\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}$$

Dies ist mit der 1. Gleichung zu combiniren.

37. $\begin{bmatrix} 3x^2 + 2xy + y^2 = 43 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 33 \end{bmatrix}$

L. $x = 3, -3, \pm \frac{8}{3}\sqrt{3}$

$y = 2, -2, \mp \frac{7}{3}\sqrt{3}$

a. Man sucht zunächst xy, wie in 36. b. Indem man die Glieder mit xy nach rechts bringt und dann durch die Combination der beiden Gleichungen zunächst x^2 und y^2 bestimmt, erhält man

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} 2x^2 = 24 - xy \\ 2y^2 = 14 - xy \end{bmatrix}$$

Diese beiden Gleichungen, mit einander multiplicirt, liefern eine quadratische Gleichung für xy. Man erhält

$$xy = 6, -\frac{56}{3}$$

Für die erste Wurzel $(+ 6)$ müssen x und y gleiche Zeichen haben, für die zweite $(-\frac{56}{3})$ entgegengesetzte. Man kann darnach aus (1) die Unbekannten hinschreiben.

b. Leichter kommt man zum Ziele nach 36. c. Man sucht $\frac{x}{y}$. Aus jeder Gleichung, welche nur Glieder mit x^2, y^2 und xy enthält, lässt sich $\frac{x}{y}$ bestimmen. Man dividirt durch y^2 und erhält für $\frac{x}{y}$ eine quadratische Gleichung. — In 36. c. ist dieser Quotient durch Anwendung der corr. Addition gefunden. Dies Verfahren ist hier nicht anwendbar. Man dividirt die Gleichungen in einander, oder, was dasselbe ist, man eliminirt die Bekannten, multiplicirt die 1. Gleichung mit 33, die 2. mit 43 und subtrahirt, so giebt das

$$14x^2 - 5xy - 24y^2 = 0$$

$$14\frac{x^2}{y^2} - 5\frac{x}{y} - 24 = 0$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}, -\frac{8}{7}$$

Man hat daher nach Aufg. 1. in einer der gegebenen Gleichungen zu substituiren

1. $\begin{bmatrix} x = 3\lambda \\ y = 2\lambda \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} x = -8\lambda \\ y = 7\lambda \end{bmatrix}$

und λ zu bestimmen, so geben 1. und 2. die Unbekannten selber. — Die Zeichen von x und y ergeben sich von selbst auf diesem Wege, bedürfen also keiner besondern Berücksichtigung.

38. $\begin{bmatrix} x^2 + xy + 3y^2 = 47 \\ x^2 - xy + 2y^2 = 23 \end{bmatrix}$

L. $x = 5, -5, \pm \frac{5}{11}\sqrt{11}$

$y = 2, -2, \pm \frac{12}{11}\sqrt{11}$

39. $\begin{bmatrix} (2x - 3y)(3x - 2y) = 21 \\ x^2 + 3y^2 = 12 \end{bmatrix}$

L. $x = 3, -3, \pm \sqrt{\frac{3}{217}}$

$y = 1, -1, \pm 17\sqrt{\frac{3}{217}}$

Man führe in der 1. Gleichung die Multiplication aus und verfahre ganz wie bei den beiden vorigen Aufgaben.

40. $\begin{bmatrix} (9x + y)(x + y) = 273 \\ (9x - y)(x - y) = 33 \end{bmatrix}$

L. $x = 4, -4, 1, -1$

$y = 3, -3, 12, -12$

41. $\begin{bmatrix} x^3 + y^3 = (a + b)(x - y) \\ x^2 - xy + y^2 = a - b \end{bmatrix}$

L. $x = a\sqrt{\frac{a-b}{a^2 - ab + b^2}}$ $\quad y = b\sqrt{\frac{a-b}{a^2 - ab + b^2}}$

Die Division der Gleichungen in einander liefert leicht $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. Dann weiter nach 1. — Aehnlich die folgenden 3 Aufgaben.

42. $\begin{bmatrix} x^3 + y^3 = a(x - y)^2 \\ x^2 - xy + y^2 = b(x - y) \end{bmatrix}$

L. $x = 0, \frac{2(a+b)b^2}{a^2 + 3b^2}$ $\quad y = 0, \frac{2(a-b)b^2}{a^2 + 3b^2}$

43. $\begin{bmatrix} x^3 + y^3 = (a + b)(x - y)^2 \\ x^2 - xy + y^2 = (a - b)(x - y) \end{bmatrix}$

L. $x = 0, \frac{a(a-b)^2}{a^2 - ab + b^2}$ $\quad y = 0, \frac{b(a-b)^2}{a^2 - ab + b^2}$

44. $\begin{bmatrix} (x + y)(x^2 + y^2) = a \\ (x - y)(x^2 + y^2) = b \end{bmatrix}$

L. $x = \frac{a+b}{\sqrt[3]{4(a^2 + b^2)}}$ $\quad y = \frac{a-b}{\sqrt[3]{4(a^2 + b^2)}}$

45. $$\left[\begin{array}{l} x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = \dfrac{a}{x+y} \\ x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = \dfrac{b}{x-y} \end{array}\right]$$

L. $x = \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt[4]{8\,(a+b)}}$, $y = \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{8\,(a+b)}}$

Man zerlege links in Factoren, dividire die Gleichungen in einander, ziehe die Wurzel und wende correspond. Addition an, so erhält man

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

46. $$\left[\begin{array}{l} x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = a^2\,(x-y) \\ x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = b^2\,(x+y) \end{array}\right]$$

L. $x = 0$, $\dfrac{a+b}{2}\sqrt{\dfrac{2ab}{a^2+b^2}}$, $\dfrac{a-b}{2}\sqrt{-\dfrac{2ab}{a^2+b^2}}$

$y = 0$, $\dfrac{a-b}{2}\sqrt{\dfrac{2ab}{a^2+b^2}}$, $\dfrac{a+b}{2}\sqrt{-\dfrac{2ab}{a^2+b^2}}$

47. $$\left[\begin{array}{l} (x-y)\,(x+y)^2 = a \\ (x+y)\,(x-y)^2 = b \end{array}\right]$$

L. $x = \dfrac{a+b}{2\sqrt[3]{ab}}$, $y = \dfrac{a-b}{2\sqrt[3]{ab}}$

48. $$\left[\begin{array}{l} (x+y)^3\,(x-y)^2 = a \\ (x+y)^2\,(x-y)^3 = b \end{array}\right]$$

L. $x = \dfrac{a+b}{2\sqrt[5]{a^2b^2}}$, $y = \dfrac{a-b}{2\sqrt[5]{a^2b^2}}$

49. $$\left[\begin{array}{l} (x+y)\,(x^2+3y^2) = a \\ (x-y)\,(x^2+3y^2) = b \end{array}\right]$$

L. $x = \dfrac{a+b}{2\sqrt[3]{a^2-ab+b^2}}$, $y = \dfrac{a-b}{2\sqrt[3]{a^2-ab+b^2}}$

50. $$\left[\begin{array}{l} x^2y = (a-x)^3 \\ xy^2 = (b-y)^3 \end{array}\right]$$

L. $x = \dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ $\quad y = \dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Man zieht die Kubikwurzel, bringt die Unbekannten nach links und dividirt die Gleichungen durch einander, so findet man leicht

$$\frac{x}{y} = \frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}$$

51. $$\left[\begin{array}{l} x^2 + n^2 = \frac{b^2}{a^2}(x + y)^2 \\ y^2 + n^2 = \frac{c^2}{a^2}(x + y)^2 \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{n(a^2 + b^2 - c^2)}{r} \qquad y = \frac{n(a^2 - b^2 + c^2)}{r}$

$$r = \sqrt{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}$$

Man subtrahirt die Gleichungen von einander, dividirt durch $x + y$ und erhält zunächst leicht

$$\frac{x}{y} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2} \text{ u. s. w.}$$

Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks, so sind $\frac{x}{n}$ und $\frac{y}{n}$ resp. die Cotangenten der den Seiten c und b gegenüberliegenden Winkel, also

(1) $$x = n \cot \gamma \qquad y = n \cot \beta,$$

wenn die sonst üblichen Bezeichnungen auch hier gelten. — Es ist nämlich

$$r = 4\Delta = 2ab \sin \gamma = 2ac \sin \beta$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos \gamma$$
$$a^2 - b^2 + c^2 = 2ac \cos \beta$$

Setzt man daher aus (1) die Werthe für x und y in den gegebenen Gleichungen, so folgt, dass in jedem Dreieck sein muss

$$\cot \gamma^2 + 1 = \frac{b^2}{a^2}(\cot \gamma + \cot \beta)^2$$
$$\cot \beta^2 + 1 = \frac{c^2}{a^2}(\cot \gamma + \cot \beta)^2,$$

was leicht zu beweisen ist.

---

52. $$\left[\begin{array}{c} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{a}{b} \\ x^3 + y^3 = c^3 \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{c}{2} \cdot \frac{\sqrt{3a - b} + \sqrt{3b - a}}{\sqrt[6]{4b^2(3a - b)}}, \quad y = \frac{c}{2} \cdot \frac{\sqrt{3a - b} - \sqrt{3b - a}}{\sqrt[6]{4b^2(3a - b)}}$

Man verfahre nach 36. c. Nach I. 18. 8. ergiebt sich aus der 1. Gleichung

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3a - b} + \sqrt{3b - a}}{\sqrt{3a - b} - \sqrt{3b - a}},$$

man hat also in der 2. Gleichung zu substituiren

$x = \lambda\left(\sqrt{3a-b} + \sqrt{3b-a}\right) \quad y = \lambda\left(\sqrt{3a-b} - \sqrt{3b-a}\right)$.

und λ zu bestimmen.

53. $\left[\begin{matrix}(x+y)(x^2+y^2) = a \\ x^2y + xy^2 = c\end{matrix}\right]$

L. $x = \dfrac{\sqrt{a+2c}+\sqrt{a-2c}}{2\sqrt[6]{a+2c}}, \quad y = \dfrac{\sqrt{a+2c}-\sqrt{a-2c}}{2\sqrt[6]{a+2c}}$

Man dividire die Gleichungen in einander und verfahre nach 36. *c*.

54. $\left[\begin{matrix}x^3 + y^3 = a \\ x^2y + xy^2 = c\end{matrix}\right]$

L. $x = \dfrac{\sqrt{a+3c}+\sqrt{a-c}}{2\sqrt[6]{a+3c}}, \quad y = \dfrac{\sqrt{a+3c}-\sqrt{a-c}}{2\sqrt[6]{a+3c}}$

Man dividirt die Gleichungen in einander. Das giebt

$$\frac{x^2 - xy + y^2}{xy} = \frac{a}{c}$$

Daraus nach I, 18. 8.

$$\frac{x+y}{x-y} = \sqrt{\frac{a+3c}{a-c}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{a+3c}+\sqrt{a-c}}{\sqrt{a+3c}-\sqrt{a-c}} \text{ u. s. w.}$$

55. $\left[\begin{matrix}x^3 + y^3 = a(x^2+y^2) \\ x^2y + xy^2 = c(x^2+y^2\end{matrix}\right]$

L. $x = \dfrac{a+c}{2}\left(1 + \sqrt{\dfrac{a-c}{a+3c}}\right), \quad y = \dfrac{a+c}{2}\left(1 - \sqrt{\dfrac{a-c}{a+3c}}\right)$

Dazu kommt noch $x = y = 0$. — Man verfahre ganz wie in 54.

56. $\left[\begin{matrix}\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2} = a \\ \dfrac{x^2+y^2}{x+y} = b\end{matrix}\right]$

L. $x = \dfrac{2a-b+r}{2}, \quad y = \dfrac{2a-b-r}{2}$ für $r = \sqrt{(2a-b)(3b-2a)}$

Man dividire die 2. Gleichung in die 1. Gleichung, so erhält man $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{a}{b}$, woraus $\dfrac{x}{y}$ nach I, 18. zu bestimmen ist.

57. $\left[\begin{matrix}x^2 + xy + y^2 = axy \\ x^3 + y^3 = bxy\end{matrix}\right]$

L. $x = \dfrac{b}{2(a-2)}\left(1 + \sqrt{\dfrac{a-3}{a+1}}\right), \quad y = \dfrac{b}{2(a-2)}\left(1 - \sqrt{\dfrac{a-3}{a+1}}\right)$

Dazu kommt noch $x = y = 0$. — Die 1. Gleichung liefert die Quotienten $\frac{x}{y}$ (s. 36. c. und I. 18.).

58. $\left[\begin{array}{c} x^2 - xy + y^2 = \sqrt[3]{a^2 - ab + b^2} \\ x^3 + y^3 = a + b \end{array}\right]$

L. $x = \frac{a}{\sqrt[3]{a^2 - ab + b^2}}$, $y = \frac{b}{\sqrt[3]{a^2 - ab + b^2}}$

Die für die Unbekannten gefundenen Werthe kann man auch vertauschen. — Man dividire die 3. Potenz der 1. Gleichung in das Quadrat der 2. Gleichung. Das giebt

$$\frac{(x+y)^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{(a+b)^2}{a^2 - ab + b^2}$$

Daraus nach I, 18.

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{a+b}{\pm (a-b)}, \text{ d. h. } \frac{x}{y} = \frac{a}{b}, \frac{b}{a} \text{ u. s. w.}$$

59. $\left[\begin{array}{l} x^3 + y^3 = axy \\ x + y = b \end{array}\right]$

L. $x = \frac{b}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{a-b}{a+3b}}\right)$, $y = \frac{b}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{a-b}{a+3b}}\right)$

Man dividire die 2. Gleichung in die 1. und bestimme $\frac{x}{y}$.

„60". $[xy = x^2 - y^2 = a(x+y)]$

L. $x = 0, \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5})$ $\quad y = 0, \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$

61. $[xy = (3-x)^2 = (2-y)^2]$

L. $x = \frac{9}{5}, 1, \frac{9}{2}$

$y = \frac{4}{5}, 4, \frac{1}{2}$

62. $\left[\begin{array}{l} \frac{ax+by}{x+y} = a - y^2 \\ x^2 + y^2 = a - b \end{array}\right]$

L. $x = 0, \sqrt{a-b}, \sqrt{\frac{a-b}{2}}$

$y = \sqrt{a-b}, 0, \sqrt{\frac{a-b}{2}}$

63. $\left[\begin{array}{l} ax^2 + by^2 = cx^3 \\ cx^2 - dy^2 = ax \end{array}\right]$

L. $x = 0, \frac{a}{c}, \frac{b}{d}$

$y = 0, 0, \frac{1}{d^2}\sqrt{bd(bc - ad)}$

Man eliminire y^2, so hat man leicht x.

64. $\left[\begin{matrix} 10x^2 - 9y^2 = 2x^3 \\ 7x^2 - 6y^2 = 13x \end{matrix}\right]$

L. $x = 0,\ 3,\ -\frac{13}{4}$

$y = 0,\ \pm 2,\ \pm \frac{13}{4}\sqrt{\frac{11}{6}}$

65. $\left[\begin{matrix} x^3 + 3xy^2 = a \\ y^3 + 3x^2y = b \end{matrix}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}\right) \quad y = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{a+b} - \sqrt[3]{a-b}\right)$

66. $\left[\begin{matrix} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{x-y}{a} \\ \frac{x}{y} \cdot \frac{m^2+xy}{m^2-xy} = c^2 \end{matrix}\right]$

L. $x = m\sqrt{\frac{c^2-1}{c^2+1}},\ ac\sqrt{\frac{m^2-a^2}{m^2+a^2}}$

$y = m\sqrt{\frac{c^2-1}{c^2+1}},\ \frac{a}{c}\sqrt{\frac{m^2+a^2}{m^2-a^2}}$

Die 1. Gleichung lässt sich nach I, 92. zerlegen in

1. $x - y = 0$ 2. $\sqrt{xy} = a$

Jede dieser Gleichungen ist mit der 2. Gleichung zu combiniren.

67. $\left[x^2 + y^2 = ax + by = m^2\right]$

L. $x = \frac{m}{a^2+b^2}\left(am + b\sqrt{a^2+b^2-m^2}\right),$

$y = \frac{m}{a^2+b^2}\left(bm - a\sqrt{a^2+b^2-m^2}\right)$

68. $\left[\begin{matrix} x + y = a + b \\ \frac{x^3+y^3}{x-y} = \frac{a^3+b^3}{a-b} \end{matrix}\right]$

L. $x = a,\ \frac{2a^2+ab-b^2}{3(a-b)} \qquad y = b,\ \frac{a^2-ab-2b^2}{3(a-b)}$

Man setze $x = a + z$ und $y = b - z$. Dann wird die 1. Gleichung identisch erfüllt. Aus der 2. Gleichung ergeben sich für z die Werthe

$$0 \text{ und } -\frac{a^2-4ab+b^2}{3(a-b)}$$

69. $\left[\begin{matrix} \frac{1+x+x^2}{1+y+y^2} = 3 \\ x + y = 6 \end{matrix}\right]$

L. $x = 16,\ 4 \qquad y = -10,\ 2$

70. $\left[\begin{array}{r} \frac{x^2+y+1}{y^2+x+1} = \frac{3}{2} \\ x-y=1 \end{array}\right]$

L. $x = 3,\ 2 \qquad y = 2,\ 1$

71. $\left[\begin{array}{r} 3x^2-8xy+4y^2=0 \\ x^2+y^2+13(x-y)=0 \end{array}\right]$

L. $x = 0,\ 2,\ -\frac{26}{5}$

$y = 0,\ 3,\ -\frac{13}{5}$

Aus der 1. Gleichung findet man $\frac{x}{y} = \frac{2}{3},\ 2$

72. $\left[\begin{array}{r} x^2-3xy+2y^2=0 \\ 3x^2-5xy+y^2+5x-y=3 \end{array}\right]$

L. $x = 1,\ 3,\ -3 \pm \sqrt{13}$

$y = 1,\ 3,\ \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{13})$

73. $\left[\begin{array}{r} x^2+y^2-a(x+y)+2c(a-2c)=0 \\ xy-c(x+y)+2c^2=0 \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = 2c,\ 0,\ \frac{a+r}{2} \\ y = 0,\ 2c,\ \frac{a-r}{2} \end{array}\right\}$ für $r = \sqrt{a^2-4ac+8c^2}$

Man multiplicirt die 2. Gleichung mit 2 und addirt die 1. Gleichung dazu, so erhält man eine quadratische Gleichung für $x + y$.

74. $\left[\begin{array}{r} x^2+y^2-(x+y)-12=0 \\ xy-2(x+y)+8=0 \end{array}\right]$

L. $x = 4,\ 0,\ 3,\ -2$

$y = 0,\ 4,\ -2,\ 3$

75. $\left[\begin{array}{r} \frac{x^2+xy-y^2}{a^2+4ab-b^2} = \frac{x-y}{4b} \\ x+y=a \end{array}\right]$

L. $x = \frac{a+b}{2},\ -\frac{a(a-b)}{2b}$

$y = \frac{a-b}{2},\ \frac{a(a+b)}{2b}$

Da $x + y$ gegeben ist, so suche man $x - y$ zunächst, setze also

$$x - y = t,$$

so dass man hat

(1) $\qquad x = \frac{a+t}{2} \qquad y = \frac{a-t}{2}$

Dies ist in der 1. Gleichung zu substituiren. Das giebt

$$\frac{a^2 + 4at - t^2}{a^2 + 4ab - b^2} = \frac{t}{b}$$

Dieser Gleichung wird genügt durch $t = b$. Bringt man also auf 0:

$$bt^2 + (a^2 - b^2)\, t - a^2 b = 0,$$

so muss sein

$$(t - b)\,(bt + a^2) = 0 \quad \text{(s. I, 105.)}$$

$$\text{d. h. } t = b,\ -\frac{a^2}{b}$$

Dann folgen aus (1) die Unbekannten selber.

76. $\left[x^3 + y^3 = a\,(x - y) = b\,(x^2 - y^2)\right]$

L. 1. $x = y = 0$

2. $x = \frac{3a + 2b^2 + r}{6b},\ y = \frac{3a - 2b^2 - r}{6b},\ r = \sqrt{4b^4 - 3a^2}$

77. $\left[x^2 + y^2 = xy = x + y\right]$

L. 1. $x = y = 0$ 2. $x = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{-3}\right),\ y = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{-3}\right)$

In Worte gekleidet würde diese Aufgabe so heissen:
Suche zwei Zahlen, deren Summe, Product und Summe der Quadrate einander gleich sind.

78. $\left[x^2 - y^2 = \frac{x}{y} = x - y\right]$

L. 1. $x = y = 0$ 2. $x = \frac{1 + \sqrt{-1}}{2},\ y = \frac{1 - \sqrt{-1}}{2}$

In Worten ausgedrückt heisst diese Aufgabe:
Suche zwei Zahlen, deren Differenz, Quotient und Differenz der Quadrate einander gleich sind.

79. $\left[x + y = x^2 + y^2 = x^3 + y^3\right]$

L. $x = 0,\ 1,\ 0,\ 1$

$y = 0,\ 0,\ 1,\ 1$

In Worten: Suche zwei Zahlen, deren Summe, Summe der Quadrate und Summe der Kuben einander gleich sind.

80. $\left[x^3 + y^3 = 7xy = 28\,(x + y)\right]$

L. $x = 0,\ 2,\ -4,\ 7 \pm \sqrt{-7}$

$y = 0,\ -4,\ 2,\ 7 \mp \sqrt{-7}$

81. $\left[\begin{array}{l} x + xy + y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{array}\right]$

L. $x = 2,\ 1,\ -2 \pm \sqrt{-5}$

$y = 1,\ 2,\ -2 \mp \sqrt{-5}$

Man sucht zunächst xy, indem man in der 1. Gleichung xy nach rechts bringt, quadrirt und davon die 2. Gleichung subtrahirt. Das liefert eine quadratische Gleichung für xy, aus der folgt $xy = 2,\ 9$.

82. $$\left[\begin{array}{c} \frac{4x+y+b}{2x+y} - \frac{y+a-b}{x+b} = 1 \\ x+y=a \end{array}\right]$$

L. $x = a-b,\ -\frac{2a+b}{3}$

$y = b,\ \frac{5a+b}{3}$

83. $$\left[\begin{array}{l} 3x+y=a+b \\ \frac{4x+y-b}{2x+y-b} - \frac{4x+y-a}{2x+y-a} = \frac{3(a-b)}{a-3b} \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1}{3}a,\ 3b \qquad y = b,\ a-8b$

84. $$\left[\begin{array}{l} \frac{x-1}{y-1} = \frac{a-1}{b-1} \\ \frac{x^3-1}{y^3-1} = \frac{a^3-1}{b^3-1} \end{array}\right]$$

L. $x = a,\ \frac{b-a^2}{ab-1} \qquad y = b,\ \frac{a-b^2}{ab-1}$

Da man sogleich übersieht, dass $x = a$ und $y = b$ der Aufgabe genügen, so hat man nur eine der Unbekannten zu eliminiren, z. B. x, die entstehende Gleichung für y zu ordnen und auf 0 zu bringen, so muss sie links einen Factor $y - b$ haben (s. I, 105.).

---

85. $$\left[\begin{array}{l} x^3(1+y^2)(1+y^4) = a \\ x^3(1-y^2)(1-y^4) = b \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{\sqrt{2a-b}-\sqrt{b}}{2\sqrt[6]{2a-b}},\ y = \frac{\sqrt{2a-b}+\sqrt{b}}{\sqrt{2(a-b)}}$

Durch Division der Gleichungen in einander hat man

$$\frac{1+y^4}{(1-y^2)^2} = \frac{a}{b}$$

Diese Gleichung ist wie I, 262. ff. zu behandeln. Man hat durch corr. Addition

$$\frac{1+y^2}{1-y^2} = \sqrt{\frac{2a-b}{b}}$$

Hieraus folgt y wie angegeben. Ferner hat man hieraus

$$1+y^2 = \frac{2\sqrt{2a-b}}{\sqrt{2a-b}-\sqrt{b}} \qquad 1-y^2 = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{2a-b}-\sqrt{b}}$$

Dies ist in der 2. Gleichung zu substituiren, so kommt x.

86. $\left[x^2 + xy + y^2 = \frac{a}{x^2 + y^2} = \frac{b}{xy}\right]$

L. $x = \frac{\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}}{2\sqrt{a+b}}$, $y = \frac{\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}}{2\sqrt{a+b}}$

Man bestimme zunächst $\frac{x}{y}$ aus $\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{a}{b}$ (s. 36. c.).

87. $\left[\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{a} = \frac{xy}{b}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a + 2b} + \sqrt{a - 2b}\right)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a + 2b} - \sqrt{a - 2b}\right)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

88. $\left[\frac{a}{x+y} = \frac{b}{x+y}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = x^2 + y^2\right]$

L. $x = \frac{\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}}{2\sqrt[6]{a+2b}}$, $y = \frac{\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}}{2\sqrt[6]{a+2b}}$

89. $\left[x^4 - y^4 = \frac{a}{x^2 + y^2} = \frac{b}{2xy}\right]$

L. $x = \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}{2\sqrt[12]{a^2(a^2 - b^2)}}$, $y = \frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}{2\sqrt[12]{a^2(a^2 - b^2)}}$

90. $\left[\begin{array}{c} x^3 - y^3 = 2a \cdot \frac{x-y}{x+y} \\ x^3 + y^3 = 2b \end{array}\right]$

L. 1. $x = \frac{\sqrt{3a-b} + \sqrt{3b-a}}{2\sqrt[6]{3a-b}}$, $y = \frac{\sqrt{3a-b} - \sqrt{3b-a}}{2\sqrt[6]{3a-b}}$

2. $x = y = \sqrt[3]{b}$

Man dividire die Gleichungen in einander, hebe und bestimme zunächst

$$\frac{x+y}{x-y} = \sqrt{\frac{3a-b}{3b-a}}, \text{ also } \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3a-b} + \sqrt{3b-a}}{\sqrt{3a-b} - \sqrt{3b-a}}$$

91. $\left[\begin{array}{c} x^4 + x^2y^2 + y^4 = a \\ x^2 + xy + y^2 = \frac{b}{xy} \end{array}\right]$

L. $x = \frac{\sqrt{a+3b} + \sqrt{a-b}}{2\sqrt[4]{a+2b}}$, $y = \frac{\sqrt{a+3b} - \sqrt{a-b}}{2\sqrt[4]{a+2b}}$

Man dividire die Gleichungen in einander. Das giebt, da sich $x^2 + xy + y^2$ forthebt,

$$\frac{x^2 - xy + y^2}{xy} = \frac{a}{b},$$

woraus durch corr. Addition und Radicirung

$$\frac{x+y}{x-y} = \sqrt{\frac{a+3b}{a-b}}$$ u. s. w. (s. I. 18.).

92. $\left[\begin{array}{c} x^3 + y^3 = \dfrac{a}{x-y} \\ x^2y - xy^2 = \dfrac{b}{x+y} \end{array}\right]$

L. $x = \dfrac{\sqrt{a+3b} + \sqrt{a-b}}{2\sqrt[8]{(a+3b)(a-b)}}$, $y = \dfrac{\sqrt{a+3b} - \sqrt{a-b}}{2\sqrt[8]{(a+3b)(a-b)}}$

Man kann der Lösung auch diese Form geben:

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[8]{\frac{(a+3b)^3}{a-b}} + \sqrt[8]{\frac{(a-b)^3}{a+3b}}\right),$$

welche für die logarithmische Berechnung geeigneter ist.

93. $\left[\begin{array}{c} x^3 - y^3 = a \\ x^4 - y^4 = b\,(x+y) \end{array}\right]$

L. 1. $x = \dfrac{\sqrt{2a-b} + \sqrt{3b-2a}}{2\sqrt[6]{3b-2a}}$, $y = \dfrac{\sqrt{2a-b} - \sqrt{3b-2a}}{2\sqrt[6]{3b-2a}}$

2. $x = \sqrt[3]{\dfrac{a}{2}}$, $y = -\sqrt[3]{\dfrac{a}{2}}$

94. $\left[\begin{array}{c} x^2y + xy^2 = \dfrac{a}{x^2+y^2} \\ x^4y + xy^4 = b \end{array}\right]$

L. $x = \dfrac{\sqrt{3a-2b} + \sqrt{2b-a}}{2\sqrt[10]{(a-b)^2(3a-2b)}}$, $y = \dfrac{\sqrt{3a-2b} - \sqrt{2b-a}}{2\sqrt[10]{(a-b)^2(3a-2b)}}$

95. $\left[\begin{array}{l} x^3y + xy^3 = a\,(x+y)^2 \\ x^4y + xy^4 = b\,(x+y)^3 \end{array}\right]$

L. 1. $x = \left(1 + \sqrt{\dfrac{2b-a}{3a-2b}}\right)\dfrac{3a-2b}{2\sqrt{a-b}}$,

$y = \left(1 - \sqrt{\dfrac{2b-a}{3a-2b}}\right)\dfrac{3a-2b}{2\sqrt{a-b}}$

2. $x = y = 0$

96. $\left[\begin{array}{c} \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)(x+y) = a \\ \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = b \end{array}\right]$

L. $x = \dfrac{a-b}{2}\left(1 + \sqrt{\dfrac{2b-a}{3a-2b}}\right)$ $y = \dfrac{a-b}{2}\left(1 - \sqrt{\dfrac{2b-a}{3a-2b}}\right)$

97. $\left[\begin{matrix} x^2y + xy^2 = a\,(x^2 + y^2) \\ x^2y - xy^2 = b\,(x^2 - y^2) \end{matrix}\right]$

L. $x = 0,\ a,\ \frac{b}{a-b}\left(a + \sqrt{2ab - a^2}\right)$

$y = 0,\ a,\ \frac{b}{a-b}\left(a - \sqrt{2ab - a^2}\right)$

98. $\left[\begin{matrix} xy\,(x + y) = a \\ x^2y^2\,(x^2 + y^2) = b^2 \end{matrix}\right]$

L. $x = \frac{a + \sqrt{2b^2 - a^2}}{\sqrt[3]{4\,(a^2 - b^2)}},\ y = \frac{a - \sqrt{2b^2 - a^2}}{\sqrt[3]{4\,(a^2 - b^2)}}$

99. $\left[\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = axy = x + y\right]$

L. $x = 0,\ \frac{2}{a-1}$ $\quad y = 0,\ \frac{2}{a+1}$

100. $\left[\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = axy = x + y\right]$

L. 1. $x = \frac{1}{a-1}\left(1 + \sqrt{\frac{2}{a} - 1}\right),\ y = \frac{1}{a-1}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{a} - 1}\right)$

2. $x = y = 0$

101. $\left[\begin{matrix} x^2 - y^2 = \frac{a}{x + y} \\ x^3 - y^3 = b \end{matrix}\right]$

L. $x = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{4b - 3a}}{2\sqrt[6]{4b - 3a}},\ y = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{4b - 3a}}{2\sqrt[6]{4b - 3a}}$

„102.“ $\left[\begin{matrix} (x + y)\,(x^2 + y^2) = a \\ (x - y)\,(x^2 - y^2) = b \end{matrix}\right]$

L. $x = \frac{\sqrt{2a - b} + \sqrt{b}}{2\sqrt[6]{2a - b}},\ y = \frac{\sqrt{2a - b} - \sqrt{b}}{2\sqrt[6]{2a - b}}$

103. $\left[\begin{matrix} (x + y)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = a \\ (x - y)\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) = b \end{matrix}\right]$

L. $x = \frac{a-b}{4}\left(1 + \sqrt{\frac{b}{2a - b}}\right),\ y = \frac{a-b}{4}\left(1 - \sqrt{\frac{b}{2a - b}}\right)$

„104.“ $\left[\begin{matrix} (x + y)\,(x^2 - y^2) = a \\ (x - y)\,(x^2 + y^2) = b \end{matrix}\right]$

L. $x = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{2b - a}}{2\sqrt[6]{2b - a}},\ y = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{2b - a}}{2\sqrt[6]{2b - a}}$

105. $\left[xy = \frac{(x+y)^3}{a} = \frac{x^3+y^3}{b}\right]$

L. $x = \frac{1}{6}(a-b)\left(1+\sqrt{\frac{4b-a}{3a}}\right)$, $y = \frac{1}{6}(a-b)\left(1-\sqrt{\frac{4b-a}{3a}}\right)$

106. $\left[\begin{array}{c} xy\,(x+y) = a \\ x^3y^3\,(x^3+y^3) = b^3 \end{array}\right]$

L. $x = \frac{a+r}{\sqrt[3]{2\,(a^2-r^2)}}$, $y = \frac{a-r}{\sqrt[3]{2\,(a^2-r^2)}}$, $r = \sqrt{\frac{4b^3-a^3}{3a}}$

107. $\left[\begin{array}{l} (x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = a \\ (x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = b \end{array}\right]$

L. $x = \frac{\sqrt{3a-b}+\sqrt{3b-a}}{2\sqrt[6]{4\,(a+b)}}$, $y = \frac{\sqrt{3a-b}-\sqrt{3b-a}}{2\sqrt[6]{4\,(a+b)}}$

108. $\left[\begin{array}{l} x\,(1+y+y^2) = a \\ x^2\,(1+y^2+y^4) = b \end{array}\right]$

L. $x = \frac{a^2+b+r}{4a}$, $y = \frac{a^2+b-r}{2\,(a^2-b)}$, $r = \sqrt{(3a^2-b)\,(3b-a^2)}$

Dividirt man das Quadrat der 1. Gleichung durch die 2. Gleichung, so erhält man

$$\frac{1+y+y^2}{1-y+y^2} = \frac{a^2}{b},$$

woraus y leicht zu finden ist. — In Worten heisst diese Aufgabe so:

> Gesucht werden das 1. Glied und der Exponent einer geometrischen Progression von 3 Gliedern, wenn die Summe dieser Glieder $= a$ und die Summe ihrer Quadrate $= b$ ist.

Dann ist x das 1. Glied und y der Exponent der Progression.

109. $\left[\begin{array}{l} x^3-y^3 = \frac{a}{x+y} \\ x^3+y^3 = \frac{b}{x-y} \end{array}\right]$

L. $x = \frac{\sqrt{3a-b}+\sqrt{3b-a}}{2\sqrt[8]{4\,(3a-b)\,(3b-a)}}$, $y = \frac{\sqrt{3a-b}-\sqrt{3b-a}}{2\sqrt[8]{4\,(3a-b)\,(3b-a)}}$

110. $\left[\begin{array}{l} x^3-y^3 = a\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} \\ x^3+y^3 = b\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} \end{array}\right]$

L. $x = \frac{\sqrt{3a-b}+\sqrt{3b-a}}{2\sqrt[4]{16\,(3a-b)\,(3b-a)}}$, $y = \frac{\sqrt{3a-b}-\sqrt{3b-a}}{2\sqrt[12]{16\,(3a-b)\,(3b-a)}}$

Die Division der Gleichungen in einander liefert

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{a}{b} \text{ u. s. w.}$$

111. $\left[\begin{array}{c}\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=a\\ 4x^4+7x^2y^2+4y^4=b^4\end{array}\right]$

L. $x=\frac{b}{2}\cdot\frac{\sqrt{3a-1}+\sqrt{3-a}}{\sqrt[4]{(3a+1)(3+a)}}$, $y=\frac{b}{2}\cdot\frac{\sqrt{3a-1}-\sqrt{3-a}}{\sqrt[4]{(3a+1)(3+a)}}$

112. $\left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x^3-y^3)=a\\ (x-y)\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)=b\end{array}\right]$

L. $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{\frac{3a-b}{3b-a}}+\sqrt[4]{\frac{3b-a}{3a-b}}\right)\sqrt{\frac{a-b}{2}}$,

$y=\frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{\frac{3a-b}{3b-a}}-\sqrt[4]{\frac{3b-a}{3a-b}}\right)\sqrt{\frac{a-b}{2}}$

113. $\left[\begin{array}{c}(x+y)\left(\frac{x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}-\frac{y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}}\right)=a\\ (x-y)\left(\frac{x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}+\frac{y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}}\right)=b\end{array}\right]$

L. $x=\frac{1}{4}(a-b)\sqrt{a-b}\left(\frac{1}{\sqrt{3b-a}}+\frac{1}{\sqrt{3a-b}}\right)$

$y=\frac{1}{4}(a-b)\sqrt{a-b}\left(\frac{1}{\sqrt{3b-a}}-\frac{1}{\sqrt{3a-b}}\right)$

---

114. $\left[\begin{array}{c}x^2-2xy+3y^2=3(x-y)\\ 2x^2+xy-y^2=9(x-y)\end{array}\right]$

L. $x=0,\ 2,\ \frac{10}{3}$

$y=0,\ 1,\ \frac{2}{3}$

a. Man dividire die Gleichungen in einander, d. h. man eliminire $x-y$. Aus der entstehenden Gleichung

$$x^2-7xy+10y^2=0$$

folgt

$$\frac{x}{y}=2,\ 5.$$

Es ist also $x=2y$ und $x=5y$ in einer der Gleichungen zu setzen. Das liefert y und somit auch x.

b. Man multiplicire die Gleichungen mit solchen Factoren α und β, dass die Summe derselben durch $x-y$ theilbar ist. In

diesem Falle muss sie erfüllt werden durch $x - y = 0$, d. h. durch $x = y$. Dies ist also in

$$\alpha (x^2 - 2xy + 3y^2) + \beta (2x^2 + xy - y^2) = (3\alpha + 9\beta)(x - y)$$

zu setzen. Das giebt

$$2\alpha + 2\beta = 0, \quad \alpha = -\beta.$$

Man wird also setzen können

$$\alpha = -1 \qquad \beta = 1,$$

d. h. man zieht die 1. Gleichung von der 2. ab und erhält

$$x^2 + 3xy - 4y^2 = 6(x - y)$$
$$(x - y)(x + 4y) = 6(x - y)$$

Also durch Zerlegung

$$1.\ x - y = 0 \qquad 2.\ x + 4y = 0$$

Diese Gleichungen sind mit einer der gegebenen zu combiniren.

Die Factoren α und β lassen sich auch ohne Rechnung sofort angeben; denn ob man erst mit α und β multiplicirt und addirt und dann $x = y$ setzt, oder ob man erst $x = y$ setzt und dann mit α und β multiplicirt, muss auf dasselbe hinauslaufen. Man setzt also direct in den gegebenen Gleichungen $x - y = 0$ oder $x = y$. Das giebt links $2y^2$ und $2y^2$. Daraus schliesst man

$$2\alpha y^2 + 2\beta y^2 = 0, \quad \alpha + \beta = 0$$

d. h. $\alpha = -1$, $\beta = +1$, oder $\alpha = +1$ und $\beta = -1$, wie es gerade am bequemsten ist.

Einen der beiden hier angegebenen Wege wird man auch zweckmässig bei den folgenden 5 Aufgaben einschlagen können.

115. $\begin{bmatrix} 2x^2 - xy + 5y^2 = 10(x + y) \\ x^2 + 4xy + 3y^2 = 14(x + y) \end{bmatrix}$

L $x = 0,\ 5,\ \frac{5}{1}\frac{6}{3}$
$y = 0,\ 3,\ \frac{4}{1}\frac{2}{3}$

116. $\begin{bmatrix} 2x^2 - 3xy = 9(x - 2y) \\ x^2 - 3y^2 = 6(x - 2y) \end{bmatrix}$

L. $x = 0,\ 3 \qquad y = 0,\ 1$

117. $\begin{bmatrix} 2x^2 - y^2 = 14(x - y) \\ x^2 - 2y^2 = x - y \end{bmatrix}$

L. $x = 0,\ 3,\ 15$
$y = 0,\ 2,\ -10$

118. $\left[\begin{array}{l}(x+2y)(x+3y)=3(x+y)\\(2x+y)(3x+y)=28(x+y)\end{array}\right]$

L. $x=0,\ 3,\ \frac{55}{12}$

$y=0,\ -2,\ -\frac{5}{12}$

Man führe die Multiplicationen links aus und verfahre wie in 114.

119. $\left[\begin{array}{l}(2x-3y)(3x+4y)=39(x-2y)\\(3x+2y)(4x-3y)=99(x-2y)\end{array}\right]$

L. $x=0,\ 3,\ \frac{1007}{65}$

$y=0,\ 1,\ -\frac{399}{65}$

Man findet zunächst $\frac{x}{y}=3$ und $-\frac{53}{21}$.

---

120. $\left[\begin{array}{c}x^2+y^2=a\\\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}=b\cdot\frac{x-y}{x+y}\end{array}\right]$

L. $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{b-3+r}+\sqrt{3b-1-r}\right)\sqrt{\frac{a}{2b-2}}$

$y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{b-3+r}-\sqrt{3b-1-r}\right)\sqrt{\frac{a}{2b-2}}$

$r=\sqrt{9(b-1)^2+4b}$.

Wenn x^2+y^2 gegeben ist, so gelangt man meistens am einfachsten zum Ziele, wenn man zunächst noch xy sucht. Schreibt man die 2. Gleichung so:

$$(x^2-xy+y^2)(x+y)^2=b(x^2+xy+y^2)(x-y)^2$$

und setzt darin $x^2+y^2=a$, so hat man

$$(a-xy)(a+2xy)=b(a+xy)(a-2xy),$$

eine quadratische Gleichung für xy, welche

$$xy=\frac{a(-b-1+r)}{4(b-1)}$$

liefert. Das ist mit der 1. Gleichung in der bekannten Weise zu combiniren.

121. $\left[\begin{array}{l}\frac{x^3}{y^3}=\frac{bx-ay}{ax-by}\\x^2+y^2=c\end{array}\right]$

L. $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2a-b+r}+\sqrt{2a+b-r}\right)\sqrt{\frac{c}{2a}}$

$y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2a-b+r}-\sqrt{2a+b-r}\right)\sqrt{\frac{c}{2a}}$

für $r=\sqrt{8a^2+b^2}$

Man wende auf die 1. Gleichung corr. Add. an, so ist diese Aufgabe der Form nach nicht von der vorigen verschieden.

122. $\left[\begin{array}{c} x^2 + y^2 = a \\ x^4 + y^4 = 2bxy \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a - b + r} + \sqrt{a + b - r}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a - b + r} - \sqrt{a + b - r}\right) \end{array}\right\} r = \sqrt{2a^2 + b^2}$

123. $\left[\begin{array}{c} \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} = a^2 - 2ab - b^2 \\ x^2 + xy + y^2 = ab \end{array}\right]$

1. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(a + b)\,b} + \sqrt{(a - 3b)\,b}\right)$
   $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(a + b)\,b} - \sqrt{(a - 3b)\,b}\right)$
2. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a\,(b - a)} + \sqrt{a\,(b + 3a)}\right)$
   $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a\,(b - a)} - \sqrt{a\,(b + 3a)}\right)$

Man findet hier zunächst $xy = b^2$ und $-a^2$, was mit der 2. Gleichung zu combiniren ist.

124. $\left[\begin{array}{c} x^4 + y^4 = (2a^2 - b^2)(x^2 + y^2) \\ x^2 + xy + y^2 = a\,(2a - b) \end{array}\right]$

1. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b} + \sqrt{4a - 3b}\right)\sqrt{2a - b}$
   $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b} - \sqrt{4a - 3b}\right)\sqrt{2a - b}$
2. $x = \frac{1}{2}\sqrt{2a\,(a - b)} + \frac{1}{2}\sqrt{2a\,(a + b)}$
   $y = \frac{1}{2}\sqrt{2a\,(a - b)} - \frac{1}{2}\sqrt{2a\,(a + b)}$

Man findet hier zunächst $xy = -2a^2 + 3ab - b^2$ und $-ab$.

125. $\left[\begin{array}{c} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right]$

L. $x = a,\ b,\ -\frac{a^2 + b^2}{2\,(a + b)}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4ab}{a^2 + b^2}}\right)$

$y = b,\ a,\ -\frac{a^2 + b^2}{2\,(a + b)}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4ab}{a^2 + b^2}}\right)$

126. $\left[\begin{array}{c} x^2 - xy + y^2 = 2a \\ (x + y)\sqrt{xy} = b \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a + r} + \sqrt{\frac{1}{3}(7a - r)}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a + r} - \sqrt{\frac{1}{3}(7a - r)}\right) \end{array}\right\} r = \sqrt{a^2 + 3b^2}$

127. $\left[\begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 = 2a \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 2b \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5a + 3r} + \sqrt{a - r}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5a + 3r} - \sqrt{a - r}\right) \end{array}\right\} r = \sqrt{3a^2 - b}$

128. $\left[\begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 = a^2 - ab + b^2 \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = a^4 - a^2b^2 + b^4 \end{array}\right]$

L. $x = \pm a, \pm b, \frac{1}{2}\left(\sqrt{4a^2 - 7ab + 4b^2} + \sqrt{ab}\right)$
$y = \pm b, \pm a, \frac{1}{2}\left(\sqrt{4a^2 - 7ab + 4b^2} - \sqrt{ab}\right)$

129. $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \dfrac{a^5 + b^5}{a^3 + b^3} \\ x^2 + xy + y^2 = a^2 + ab + b^2 \end{array}\right]$

L. 1. $x = \pm a, \pm b$
$y = \pm b, \pm a$

2. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a^2 - ab + 2b^2} + i\sqrt{2a^2 + ab + 2b^2}\right)\sqrt{\dfrac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}}$

$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a^2 - ab + 2b^2} - i\sqrt{2a^2 + ab + 2b^2}\right)\sqrt{\dfrac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}}$

Man setze der Kürze und Uebersicht halber

$x^2 + y^2 = u$ $\qquad$ $a^2 + b^2 = \alpha$

$xy = v$ $\qquad$ $ab = \beta$

Das giebt

$$\left[\begin{array}{l} u^2 - uv + v^2 = \dfrac{\alpha^2 - \alpha\beta - \beta^2}{\alpha - \beta}(u - v) \\ u + v = \alpha + \beta \end{array}\right]$$

Diese Gleichungen sind nach 68. zu lösen, indem man $u = \alpha + z$ und $v = \beta - z$ setzt. Oder man dividirt die 2. Gleichung in die 1. und sucht $\frac{u}{v}$. Dies ist um so leichter, da man vorhersieht, dass eine Wurzel $\frac{u}{v} = \frac{\alpha}{\beta}$ sein muss. Man erhält

$$\frac{u}{v} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$u = \alpha, \quad -\frac{(\alpha + \beta)\beta}{\alpha - \beta}$$

$$v = \beta, \quad \frac{(\alpha + \beta)\,a}{\alpha - \beta} \text{ u. s. w.}$$

Würde die 2. gegebene Gleichung so heissen:

$$x^2 - xy + y^2 = a^2 - ab + b^2,$$

so liesse sich diese Aufgabe auf die vorige (128.) reduciren. Die Lösung würde dieselbe sein.

130. $\left[\begin{array}{c} x^3 + y^3 = a\,(x+y) \\ x^4 + y^4 = 2\,b\,(x+y)^2 \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4\,a - 3\,(3\,b + r)} + \sqrt{3\,b + r}\right)$

$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4\,a - 3\,(3\,b + r)} - \sqrt{3\,b + r}\right)$

$r = \sqrt{2\,(a - 2\,b)^2 + b^2}$

Dazu kommt nach $x = y = 0$.

131. $\left[\begin{array}{c} x^2 + y^2 = a \\ \frac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = b \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b + r} + \sqrt{2a - b - r}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b + r} - \sqrt{2a - b - r}\right) \end{array}\right\} r = \sqrt{(a-b)(5a-b)}$

132. $\left[\begin{array}{c} x^2 - xy + y^2 = a^2 - ab + b^2 \\ x^2 - y^2 = a^2 - b^2 \end{array}\right]$

L. $x = \pm\, a,\ \frac{2a-b}{3}\sqrt{3}$

$y = \pm\, b,\ \frac{a-2b}{3}\sqrt{3}$

Man löse ganz wie in Nr. 37. Man findet zunächst

$$xy = ab,\ \frac{2a^2 - 5ab + 2b^2}{3}$$

oder

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b},\ \frac{2a-b}{a-2b} \text{ u. s. w.}$$

133. $\frac{x^3 + y^3}{a^3 + b^3} = \frac{x-y}{x-y} = \frac{x+y}{a+b}$

L. wie in 132.

134. $x^2 - y^2 = a$

$\frac{x+y}{x-y} = \frac{c}{x^2+y^2}$

L. $x = \frac{\sqrt{2ac - a^2} + a}{2\sqrt[4]{2ac - a^2}},\ y = \frac{\sqrt{2ac - a^2} - a}{2\sqrt[4]{2ac - a^2}}$

Hier kommt man am einfachsten zum Ziel, wenn man die Gleichungen in einander dividirt und dann corr. Add. anwendet

$$\frac{x^2+y^2}{(x-y)^2} = \frac{c}{a},\ \frac{x+y}{x-y} = \sqrt{\frac{2c-a}{a}} = \frac{\sqrt{2ac - a^2}}{a} \text{ u. s. w.}$$

135. $\left[\begin{array}{c} x^2 - y^2 = a \\ \frac{x^3 + y^3}{x-y} = c \end{array}\right]$

L. $x = \frac{\sqrt{4ac - 3a^2} + a}{2\sqrt[4]{4ac - 3a^2}},\ y = \frac{\sqrt{4ac - 3a^2} - a}{2\sqrt{4ac - 3a^2}}$

136. $\left[\begin{array}{c} x^2 - y^2 = a \\ (x+y)^4 (x-y) = c \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{c}{a}} + a\sqrt[3]{\frac{a}{c}}\right),\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{c}{a}} - a\sqrt[3]{\frac{a}{c}}\right)$

---

137. $\left[\begin{array}{c} x^n + y^n = a \\ xy = b \end{array}\right]$

L. $x = \sqrt[n]{\frac{a+r}{2}},\ y = \sqrt[n]{\frac{a-r}{2}},\ r = \sqrt{a^2 - 4b^n}$

Man setze entweder $y = \frac{b}{x}$ in der 1. Gleichung und suche x^n; oder man erhebe die 2. Gleichung zur $n$ten Potenz und suche in der bekannten Weise aus Summe und Product die Differenz $x^n - y^n$. — Noch einfacher setzt man $x^n - y^n = z$; dann hat man wegen der 1. Gleichung

$$x^n = \frac{a+z}{2},\ \text{also}\ x = \sqrt[n]{\frac{a+z}{2}}$$

$$y^n = \frac{a-z}{2},\ \text{„}\ y = \sqrt[n]{\frac{a-z}{2}}$$

Dies in der 2. Gleichung substituirt, liefert $z = r$ u. s. w.

138. $\left[\begin{array}{c} \frac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = a \\ xy = b \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a+5b+r}{2}} + \sqrt{\frac{a-3b+r}{2}}\right)$

$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a+5b+r}{2}} - \sqrt{\frac{a-3b+r}{2}}\right)$

$r = \sqrt{(a-b)^2 + 4b^2}$

Wie 120. ff. xy gesucht wurde, wenn $x^2 + y^2$ gegeben, so sucht man hier $x^2 + y^2$, da $xy = b$ gegeben ist. Man setzt also $x^2 + y^2$ am besten gleich einer neuen Unbekannten

(1) $\qquad x^2 + y^2 = q$ und hat $xy = b$.

Das giebt zunächst

(2) $\qquad x^4 + y^4 = q^2 - 2b^2$.

Hebt man daher in der 1. Gleichung links durch $x + y$ und substituirt aus (1) und (2), so geht dieselbe über in

$$\frac{q^2 - bq - b^2}{q - b} = a, \text{ woraus}$$

$$q = \frac{a + b + r}{2}$$

Dann folgen aus (1) die Unbekannten selber.

139. $\left[\begin{matrix}(x^3 + y^3)\,(x + y) = a\,(x^2 + y^2) \\ xy = b\end{matrix}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a + 3b + r}{2}} + \sqrt{\frac{a - 5b + r}{2}}\right)$

$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a + 3b + r}{2}} - \sqrt{\frac{a - 5b + r}{2}}\right)$

$r = \sqrt{(a - b)^2 + 8b^2}$

140. $\left[\begin{matrix}x^4 + y^4 = 2a\,(x^2 + y^2) \\ xy = b\end{matrix}\right]$

L. $\left.\begin{matrix}x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a + 2b + r} + \sqrt{a - 2b + r}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a + 2b + r} - \sqrt{a - 2b + r}\right)\end{matrix}\right\} r = \sqrt{a^2 + 2b^2}$

141. $\left[\begin{matrix}\frac{x^5 + y^5}{(x + y)^3} = 2a \\ xy = 2b\end{matrix}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a + 5b + r} + \sqrt{a - 3b + r}\right)$

$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a + 5b + r} - \sqrt{a - 3b + r}\right)$

$r = \sqrt{a^2 + 10ab + 5b^2}$

---

142. $\left[\begin{matrix}x + y = a \\ xy\,(x - y)^2 = b\end{matrix}\right]$

L. $\left.\begin{matrix}x = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{\frac{a^2 + r}{2}}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{\frac{a^2 + r}{2}}\right)\end{matrix}\right\} r = \sqrt{a^4 - 16b}$

Ist $x + y$ gegeben oder gefunden, so gelangt man meistens am einfachsten zur Lösung, wenn man zunächst $x - y$ sucht. Der Uebersicht wegen führt man $x - y = z$ als neue Unbekannte ein, hat also

$$\left[\begin{matrix}x + y = a \\ x - y = z\end{matrix}\right]$$

d. h.

(1) $\qquad x = \frac{a + z}{2} \qquad y = \frac{a - z}{2}$

Dies in der 2. Gleichung substituirt, giebt

$$(a^2 - z^2)\, z^2 = 4b$$

$$z = \sqrt{\frac{a^2 + r}{2}},$$

mithin wegen (1) die Unbekannten, wie angegeben.

„143.“ $\left[\begin{array}{c} x + y = a \\ x^4 + y^4 = b \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{2r - 3a^2}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{2r - 3a^2}\right) \end{array}\right\}\ r = \sqrt{2a^4 + 2b}$

144. $\left[\begin{array}{c} x + y = a + b \\ x^4 + y^4 = a^4 + b^4 \end{array}\right]$

L. $x = a,\ b,\ \frac{1}{2}\left(a + b + i\sqrt{7a^2 + 10ab + 7b^2}\right)$

$y = b,\ a,\ \frac{1}{2}\left(a + b - i\sqrt{7a^2 + 10ab + 7b^2}\right)$

„145.“ $\left[\begin{array}{c} x + y = a \\ x^5 + y^5 = b \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{2r - a^2}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{2r - a^2}\right) \end{array}\right\}\ r = \sqrt{\frac{a^5 + 4b}{5a}}$

146. $\left[\begin{array}{c} x + y = a \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{b^2} \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{(r - b)\,(r - 3b)}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{(r - b)\,(r - 3b)}\right) \end{array}\right\}\ r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Hier wird man wohl am einfachsten xy suchen. Man findet $xy = b\,(r - b)$. Dann liefert die 2. Gleichung $x^2 + y^2 = (r - b)^2$ u. s. w.

147. $\left[\begin{array}{c} x + y = a + b \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \end{array}\right]$

L. $x = a,\ b,\ \frac{a+b}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4ab}{a^2 + b^2}}\right)$

$y = b,\ a,\ \frac{a+b}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4ab}{a^2 + b^2}}\right)$

148. $\left[\begin{array}{c} x + y = a + b \\ \frac{x^4 + y^4}{a^4 + b^4} = \left(\frac{x - y}{a - b}\right)^2 \end{array}\right]$

L. $x = a,\ b,\ \frac{a\,(a+b)}{a-b},\ -\frac{b\,(a+b)}{a-b}$

$y = b,\ a,\ -\frac{b\,(a+b)}{a-b},\ \frac{a\,(a+b)}{a-b}$

Man findet zunächst $x - y = \pm\,(a - b),\ \pm\frac{(a+b)^2}{a-b}$

149. $\left[\begin{array}{c} x+y=a \\ \frac{x^4+y^4}{(x-y)^2}=\frac{1}{8}\left(\frac{a^4}{b^2}+6a^2+b^2\right) \end{array}\right]$

L. $x=\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}, \frac{a(a+b)}{2b}, -\frac{a(a-b)}{2b}$

$y=\frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}, -\frac{a(a-b)}{2b}, \frac{a(a+b)}{2b}$

Man findet zunächst $x-y=\pm b, \pm\frac{a^2}{b}$

150. $\left[\begin{array}{c} \frac{x^2-xy+y^2}{a^2+3b^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{a^2-b^2}} \\ x-y=b \end{array}\right]$

L. $x=\frac{a+b}{2}, -\frac{a-b}{2}, \frac{b}{2}\left(\sqrt{\frac{a^2+15b^2}{a^2-b^2}}+1\right)$

$y=\frac{a-b}{2}, -\frac{a+b}{2}, \frac{b}{2}\left(\sqrt{\frac{a^2+15b^2}{a^2-b^2}}-1\right)$

Man hat hier zunächst $x+y=z$ zu bestimmen. Man findet für z die Gleichung

$$\left(\frac{z^2+3b^2}{a^2+3b^2}\right)^2=\frac{z^2-b^2}{a^2-b^2}$$

Hieraus durch corr. Add.

$$\frac{(z^2+a^2+6b^2)(z^2-a^2)}{(a^2+3b)^2}=\frac{z^2-a^2}{a^2-b^2}, \text{ d. h.}$$

1. $z^2-a^2=0$ $\quad z=\pm a$

2. $\frac{z^2+a^2+6b^2}{(a^2+3b^2)^2}=\frac{1}{a^2-b^2}$ $\quad z=\pm b\sqrt{\frac{a^2+15b^2}{a^2-b^2}}$ u. s. w.

151. $\left[\begin{array}{c} x+y=a \\ \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}=\frac{xy}{b} \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x=\frac{a}{2}\left(1+\sqrt{\frac{a-6b+2r}{3a+2b}}\right) \\ y=\frac{a}{2}\left(1-\sqrt{\frac{a-6b+2r}{3a+2b}}\right) \end{array}\right\}\ r=\sqrt{a^2-4ab+8b^2}$

152. $\left[\begin{array}{c} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{7}{3}(x-y)^2 \\ x+y=3 \end{array}\right]$

L. $x=2, 1, \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{-\frac{3}{7}}\right)$

$y=1, 2, \frac{3}{2}\left(1-\sqrt{-\frac{3}{7}}\right)$

153. $\left[\begin{array}{c} \frac{x^5+y^5}{x^3+y^3} = \frac{121}{13} \\ x+y=2 \end{array}\right]$

L. $x = 3,\ -1,\ 1+3\sqrt{-\frac{3}{65}}$

$y = -1,\ 3,\ 1-3\sqrt{-\frac{3}{65}}$

154. $\left[\begin{array}{c} \frac{x^5+y^5}{x^4+y^4} = \frac{122}{41} \\ x+y=4 \end{array}\right]$

L. $x = 3,\ 1,\ 2+\frac{2}{3}\sqrt{-5}$

$y = 1,\ 3,\ 2-\frac{2}{3}\sqrt{-5}$

155. $\left[\begin{array}{c} \frac{x^4}{y} - \frac{y^4}{x} = \frac{211}{6} \\ x-y=1 \end{array}\right]$

L. $x = 3,\ -2,\ \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{17}{15}}+1\right)$

$y = 2,\ -3,\ \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{17}{15}}-1\right)$

---

156. $\left[\begin{array}{c} x^2-xy+y^2 = 13\,(x-y) \\ xy = 12 \end{array}\right]$

L. $x = 4,\ -3,\ 4\sqrt{3}+6$

$y = 3,\ -4,\ 4\sqrt{3}-6$

Wenn man die 2. Gleichung von der 1. subtrahirt, erhält man

$$(x-y)^2 = 13\,(x-y) - 12,$$

d. h. eine quadratische Gleichung für $x-y$. Man findet

$$x-y = 1 \text{ und } 12.$$

Dann ist noch $x+y$ zu suchen. Indem man die 2. Gleichung mit 3 multiplicirt und zur 1. addirt, hat man

$$(x+y)^2 = 13\,(x-y) + 36, \text{ also}$$

1. $\left[\begin{array}{c} x-y=1 \\ x+y=\pm 7 \end{array}\right]$ 2. $\left[\begin{array}{c} x-y=12 \\ x+y=8\sqrt{3} \end{array}\right]$

157. $\left[\begin{array}{c} \frac{x^2+xy+y^2}{a^2+ab+b^2} = \frac{x+y}{a+b} \\ x^2-xy+y^2 = a^2-ab+b^2 \end{array}\right]$

L. $x = a,\ b,\ \frac{a^2-ab+b^2}{4\,(a+b)}\left(1+\sqrt{\frac{5a^2+11ab+5b^2}{a^2-ab+b^2}}\right)$

$y = b,\ a,\ \frac{a^2-ab+b^2}{4\,(a+b)}\left(1-\sqrt{\frac{5a^2+11ab+5b^2}{a^2-ab+b^2}}\right)$

Aus der Combination von $x^2 + xy + y^2$ und $x^2 - xy + y^2$ ergiebt sich $(x + y)^2$, so dass man für $x + y$ die Gleichung erhält

$$(1) \quad 2\,(x + y)^2 = \frac{3(a^2 + ab + b^2)}{a + b}\,(x + y) - (a^2 - ab + b^2).$$

Da man aus den gegebenen Gleichungen sofort ersieht, dass $x + y = a + b$ sein kann, so muss sich nach I, 105. die Gleichung (1) auch so schreiben lassen:

$$\left[x + y - (a + b)\right]\left[2\,(x + y) - \frac{a^2 - ab + b^2}{a + b}\right] = 0, \text{ d. h.}$$

$$1.\ x + y = a + b \qquad 2.\ x + y = \frac{a^2 - ab + b^2}{2\,(a + b)}$$

158. $\left[\begin{array}{l} 19\,x^2 - 26\,xy + 19\,y^2 = 91 \\ 47\,x^2 - 26\,xy + 47\,y^2 = 91\,(x + y) \end{array}\right]$

L. $x = 3,\ 2,\ \frac{5}{2},\ \frac{1}{2}$
$y = 2,\ 3,\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{2}$

Man multiplicire die Gleichungen mit geeigneten Factoren, dass bei ihrer Addition links $(x + y)^2$ entsteht (s. 114. b.). Die Factoren sind -15 und $+8$. Das giebt, wenn man durch 91 hebt,

$$(x + y)^2 = 8\,(x + y) - 15,$$

woraus sich $x + y = 5$ und 3 ergiebt. — Man kann auch zunächst, unbekümmert um $x + y$ rechts, links $x^2 + y^2$ und xy bestimmen und daraus $(x + y)^2$ zusammensetzen.

159. $\left[x^2 + y^2 = 8\,xy - 14 = 22\,xy - 14\,(x + y)\right]$

L. $x = 5,\ 1,\ 3,\ 1$
$y = 1,\ 5,\ 1,\ 3$

Man kommt hier zunächst auf

$$(x - 1)\,(y - 1) = 0.$$

Man hat also

$$1.\ x - 1 = 0 \qquad 2.\ y - 1 = 0$$

mit einer der gegebenen Gleichungen zu combiniren.

160. $\left[x^2 + y^2 = 10\,xy - 5\,(x + y) = 5\,(xy - 1)\right]$

L. $x = 3,\ 1,\ 2,\ 1$
$y = 1,\ 3,\ 1,\ 2$

161. $\left[x^3 + y^3 = 4\,x^2 - \frac{3}{4}\,xy + 4\,y^2 = 13\,(x + y)\right]$

L. $x = 4,\ 1,\ 4,\ 3$
$y = 1,\ 4,\ 3,\ 4$

Hier findet man für $x + y$ eine quadratische Gleichung. Diese liefert $x + y = 5, 7$.

---

162. $\left[\begin{array}{c} x^2 + xy + y^2 = \frac{(x-y)^3}{a} \\ x^2 - xy + y^2 = b\,(x-y) \end{array}\right]$

$$\text{L. } \left.\begin{array}{l} x = \frac{r-a}{2}\left(\sqrt{\frac{4r-5a}{3a}} + 1\right) \\ y = \frac{r-a}{2}\left(\sqrt{\frac{4r-5a}{3a}} - 1\right) \end{array}\right\} r = \sqrt{a^2 + 3ab}$$

Dazu kommt noch $x = y = 0$. — Man suche links durch die Combination der Gleichungen $(x-y)^2$ herzustellen (s. 114. und 156.). Man multiplicirt die 2. Gleichung mit 3 und subtrahirt die 1. Gleichung. Das giebt

$$2\,(x-y)^2 = 3b\,(x-y) - \frac{1}{a}\,(x-y)^3, \text{ d. h.}$$

1. $x - y = 0$ 2. $2\,(x-y) = 3b - \frac{1}{a}\,(x-y)^2$

Die letzte Gleichung liefert $x - y = r - a$. — Dann ist $x + y$ zu suchen in der bekannten und schon oft angewendeten Weise (s. 142.):

$$\begin{array}{c} x + y = z \\ x - y = r - a \\ \hline x = \frac{z + r - a}{2} \qquad y = \frac{z - (r-a)}{2} \end{array}$$

Dies in der 2. Gleichung substituirt, liefert

$$z^2 + 3\,(r-a)^2 = 4b\,(r-a) = \frac{4\,(r^2 - a^2)\,(r-a)}{3a}$$

$$z = (r-a)\sqrt{\frac{4r-5a}{3a}} \text{ u. s. w.}$$

163. $\left[\begin{array}{c} (x+y)^3 = a\,(x^2 + y^2) \\ xy = b\,(x+y) \end{array}\right]$

$$\text{L. } \left.\begin{array}{l} x = \frac{a}{4}\,(1+r)\,(1+\sqrt{r}) \\ y = \frac{a}{4}\,(1+r)\,(1-\sqrt{r}) \end{array}\right\} r = \sqrt{1 - \frac{8b}{a}}$$

Dazu kommt noch $x = y = 0$. — Man findet zunächst $x + y = 0$ und $\frac{a}{2}\,(1+r)$

164. $\left[\begin{array}{c} x^2y + xy^2 = a \\ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{1}{b} \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{\frac{r-5}{r+3}}\right)\sqrt[3]{4a\,(r+3)} \\ y = \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{\frac{r-5}{r+3}}\right)\sqrt[3]{4a\,(r+3)} \end{array}\right\} r = \sqrt{9 + \frac{4a}{b}}$

Man kubire die 1. Gleichung $xy\,(x+y) = a$. Das giebt mit Benutzung der gegebenen Gleichungen

$$x^3y^3\left(\frac{x^3y^3}{b} + 3a\right) = a^3$$

Diese Gleichung ist quadratisch für x^3y^3. Man findet

$$(1) \qquad xy = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4ab\,(r-3)}$$

Dies in der 2. Gleichung

$$x^3 + y^3 = \frac{x^3y^3}{b}$$

substituirt und das Dreifache der 1. Gleichung addirt, liefert nach Ausziehung der Kubikwurzel

$$(2) \qquad x + y = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4a\,(r+3)}$$

Jetzt ist noch $x - y$ zu suchen. Um direct die oben angegebenen Formeln für die Unbekannten zu erhalten, hat man aus (1) und (2) mit Benutzung von $\frac{4a}{b} = r^2 - 9$:

$$\frac{xy}{(x+y)^2} = 2\sqrt[3]{\frac{b\,(r-3)}{4a\,(r+3)^2}} = \frac{2}{r+3}$$

Hieraus durch corr. Addit. nach I, 18.

$$\frac{x-y}{x+y} = \sqrt{\frac{r-5}{r+3}},$$

also wegen (2)

$$(3) \qquad x - y = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r-5}{r+3}}\sqrt[3]{4a\,(r+3)}$$

Aus der Combination von (2) und (3) folgen die angegebenen Formeln für die Unbekannten.

165. $\left[\begin{array}{c} x^2y + xy^2 = a^2b + ab^2 \\ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = a,\ b,\ -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{a^2+3ab+b^2}{a^2-ab+b^2}}\right)\sqrt[3]{a^3+b^3} \\ y = b,\ a,\ -\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{a^2+3ab+b^2}{a^2-ab+b^2}}\right)\sqrt[3]{a^3+b^3} \end{array}\right.$

Die imaginären Wurzeln, welche $\sqrt[3]{(a+b)^3}$ liefern, sind nicht mitgerechnet. Im Ganzen müssen 12 Wurzelpaare kommen. Davon sind nur 4 reell.

166. $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^4+y^4}{x^3+y^3} = a \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{b} \end{array}\right]$

$$\text{L. } x = \frac{a+4b+r}{4}\left(1+\sqrt{\frac{a-6b+2r}{3a+2b}}\right)$$

$$y = \frac{a+4b+r}{4}\left(1-\sqrt{\frac{a-6b+2r}{3a+2b}}\right)$$

$$r = \sqrt{a^2-4ab+8b^2}$$

Man suche zunächst xy. Man multiplicirt die beiden Gleichungen mit einander, hebt durch $x+y$ und eliminirt dann überall x^2+y^2 und x^4+y^4 durch

$$x^2+y^2 = \frac{x^2y^2}{b^2} - 2xy,$$

was man aus der 2. Gleichung findet. Mittelst xy hat man dann auch $x+y$ aus der 2. Gleichung.

167. $\left[\begin{array}{l} x^4+y^4 = a\,(x+y)^2 \\ xy = b\,(x+y) \end{array}\right]$

$$\text{L. } x = 0, \quad \frac{2b+\sqrt{a+2b^2}+\sqrt{a-2b^2}}{2}$$

$$y = 0, \quad \frac{2b+\sqrt{a+2b^2}-\sqrt{a-2b^2}}{2}$$

Indem man das doppelte Quadrat der 2. Gleichung mit der 1. Gleichung combinirt, erhält man

(1) $\qquad x^2-y^2 = (x+y)\sqrt{a-2b^2}$

(2) $\qquad x^2+y^2 = (x+y)\sqrt{a+2b^2}$

Die Gleichung (1) zerfällt in

1. $x+y=0$ $\qquad$ 2. $x-y=\sqrt{a-2b^2}$

Diese beiden Gleichungen sind nach einander mit der Gleichung (2) zu combiniren.

168. $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2 = a\,(x+y) \\ x^4+y^4 = b\,(x+y)^2 \end{array}\right]$

$$\text{L. } x = 0, \quad \frac{a+\sqrt{2\,(a^2-b)}+\sqrt{2b-a^2}}{2}$$

$$y = 0, \quad \frac{a+\sqrt{2\,(a^2-b)}-\sqrt{2b-a^2}}{2}$$

169. $\left[\begin{array}{c} x^4 + 10\,x^2y^2 + y^4 = a\,(x+y)^2 \\ 2\,xy = b\,(x+y) \end{array}\right]$

L. $x = 0,\ \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{a-2b^2} + \sqrt{a-3b^2}\right)$

$y = 0,\ \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{a-2b^2} - \sqrt{a-3b^2}\right)$

---

170. $\left[\begin{array}{c} xy + \sqrt{(1-x^2)\,(1-y^2)} = a \\ x^2 + y^2 = b \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a}+1\right)(a+b-1)} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a}-1\right)(a-b+1)}$

$y = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a}+1\right)(a+b-1)} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a}-1\right)(a-b+1)}$

Man schaffe aus der 1. Gleichung die Wurzel fort, so findet man mit Benutzung der 2. Gleichung

$$2\,xy = \frac{a^2+b-1}{a}$$

Dies mit der 2. Gleichung combinirt, liefert

$(x+y)^2 = \frac{ab+a^2+b-1}{a}$, $(x-y)^2 = \frac{ab-a^2-b+1}{a}$ u. s. w.

171. $\left[\begin{array}{c} xy + \frac{x}{y} = a\,(x^2+y^2) \\ xy - \frac{x}{y} = b\,(x^2+y^2) \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1+\sqrt{1-(a+b)^2}}{\sqrt{a^2-b^2}},\ y = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

Die Division der Gleichungen in einander liefert eine Gleichung für y.

172. $\left[\begin{array}{c} x^2 + y^2 = a \\ \frac{x-y}{x+y} = \frac{2x^2-a}{b} \end{array}\right]$

L. $x = \sqrt{\frac{a}{2}},\ \frac{\sqrt{b}+\sqrt{2a-b}}{2}$

$y = \sqrt{\frac{a}{2}},\ \frac{\sqrt{b}-\sqrt{2a-b}}{2}$

173. $\left[\begin{array}{c} x = 10 \cdot \frac{y-1}{y+1} \\ y = \frac{9}{2} \cdot \frac{x-1}{x+1} \end{array}\right]$

L. $x = 5,\ 2 \qquad y = 3,\ \frac{3}{2}$

174. $\left[\begin{array}{l} \frac{x+y}{x-y} = \frac{3}{2}\,xy \\ \frac{xy+1}{xy-1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{x}{y} \end{array}\right]$

L. $x = \pm 2, \pm \frac{1}{3}$
$y = \pm 1, \mp 1$

175. $\left[\begin{array}{l} x^3 = a\,(x^2+y^2) - b\,xy \\ y^3 = b\,(x^2+y^2) - a\,xy \end{array}\right]$

L. $x = 0,\ a,\ \frac{a+b}{2}\,(1+\sqrt{-3}),\ \frac{a-b}{2}\,(1+\sqrt{-3})$
$y = 0,\ b,\ \frac{a+b}{2}\,(1-\sqrt{-3}),\ \frac{a-b}{2}\,(-1+\sqrt{-3})$

Durch Addition und Subtraction erhält man aus den gegebenen Gleichungen

$$x^3 + y^3 = (a+b)\,(x^2 - xy + y^2)$$
$$x^3 - y^3 = (a-b)\,(x^2 + xy + y^2)$$

Jede dieser Gleichungen lässt sich zerlegen in 2 andere. Das giebt im Ganzen 4 Paare von Gleichungen, welche zu lösen sind:

1. $\left[\begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 0 \end{array}\right]$ 2. $\left[\begin{array}{l} x + y = a + b \\ x - y = a - b \end{array}\right]$

3 $\left[\begin{array}{l} x + y = a + b \\ x^2 + xy + y^2 = 0 \end{array}\right]$ 4. $\left[\begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 = 0 \\ x - y = a - b \end{array}\right]$

176. $\left[\begin{array}{l} x^2 + 1 = \frac{a+b}{4c}\,(x-y)^2 \\ \\ y^2 - 1 = \frac{a-b}{4c}\,(x-y)^2 \end{array}\right]$

L. $x = \frac{r+c}{\sqrt{c\,(b-2r)}},\ y = \frac{r-c}{\sqrt{c\,(b-2r)}},\ r = \sqrt{ac - c^2}$

Die Gleichungen sind zu addiren. Aus der sich ergebenden Gleichung folgt durch corr. Add. nach I, 18.

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{a-c} + \sqrt{c}}{\sqrt{a-c} - \sqrt{c}} = \frac{r+c}{r-c} \text{ u. s. w.}$$

177. $\left[\begin{array}{l} 2 + x^2 = a\,(x+y)^2 \\ 2 - y^2 = b\,(x-y)^2 \end{array}\right]$

L. $x = \frac{\sqrt{2b+1} + \sqrt{2a-1}}{\sqrt{4ab + a - b - r}},\ y = \frac{\sqrt{2b+1} - \sqrt{2a-1}}{\sqrt{4ab + a - b - r}}$
$r = \sqrt{(2b+1)\,(2a-1)}$

178. $\left[\begin{array}{l} (x+y)^2 = 2x^2 + 7 \\ (x-y)^2 = 3y^2 - 11 \end{array}\right]$

L. $x = \pm 3, \pm 1$
$y = \pm 2, \pm 2$

Eliminirt man die Bekannten, so giebt das eine quadratische Gleichung für $\frac{x}{y}$. Man erhält $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$. — Auch xy kann man nach 37. a. zunächst suchen. Man erhält da sofort $y^2 = 4$.

179. $\left[\begin{array}{l} x^3 - n^3 = \frac{b+c}{2a}(x^2 + xy + y^2)(x + y) \\ y^3 - n^3 = \frac{b-c}{2a}(x^2 + xy + y^2)(x + y) \end{array}\right]$

L. $x = \frac{(a+c)\,n}{r} \qquad y = \frac{(a-c)\,n}{r}$

$$r = \sqrt[3]{a^2(a - 3b) + c^2(3a - b)}$$

180. $\left[\begin{array}{l} x^2 - 2xy = ay^2 \\ 2xy - y^2 = b^2 \end{array}\right]$

L. $x = \frac{(r+1)\,b}{\sqrt{2r+1}}, \; y = \frac{b}{\sqrt{2r+1}}, \; r = \sqrt{a+1}$

Aus der 1. Gleichung lässt sich $\frac{x}{y}$ bestimmen; dann weiter nach 1. oder 2.

181. $\left[\frac{a}{x} = \frac{x(x+y)}{b} = \frac{y^2}{c}\right]$

L. $x = \sqrt[3]{\frac{a(c-r)^2}{4c}}, \; y = \sqrt[3]{\frac{ac(c+r)}{2b}}, \; r = \sqrt{4bc + c^2}$

B.

Gleichungen meist homogenen Charakters.

Zweite Stufe.

182. $\left[\begin{array}{c} x^2 - y^2 = a \\ 4xy(x^2 + y^2) = b \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{r+b} + \sqrt[4]{r-b}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{r+b} - \sqrt[4]{r-b}\right) \end{array}\right\} r = \sqrt{a^4 + b^2}$

Indem man in der 2. Gleichung xy nach rechts bringt und dann die Differenz der Quadrate der Gleichungen bildet, erhält man eine Gleichung für xy. Sie liefert

$$8x^2y^2 = -a^2 + r$$

Dies zum Quadrate der 1. Gleichung addirt, giebt

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = r$$

Dies ist durch Addition und Subtraction mit der 2. Gleichung zu verbinden. Dann erhält man

$$(x+y)^4 = r+b, \text{ also } x+y = \sqrt[4]{r+b}$$
$$(x-y)^4 = r-b, \text{ also } x-y = \sqrt[4]{r-b} \text{ u. s. w.}$$

183. $\left[\begin{array}{c} x^3 - y^3 = a\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \\ x^2 - y^2 = b \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}(2r - 8a + b^2)} + \sqrt[4]{2r + 8a - b^2}\right)$
$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}(2r - 8a + b^2)} - \sqrt[4]{2r + 8a - b^2}\right)$
$r = \sqrt{16a^2 - 14ab^2 + b^4}$

Indem man die 1. Gleichung durch $x - y$ hebt, dann $x^2 + y^2$ isolirt, findet man ähnlich wie in 182. hier zunächst

$$x^2y^2 = \frac{2a - b^2 + r}{6}$$

184. $\left[\begin{array}{c} x^4 - y^4 = axy \\ (x^2+y^2)^2 = b(x^2 - y^2) \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{8}\left(\sqrt{4b - a + r} + \sqrt{4b + a - r}\right)\sqrt[4]{\frac{2a(r-a)}{b^2}}$
$y = \frac{1}{8}\left(\sqrt{4b - a + r} - \sqrt{4b + a - r}\right)\sqrt[4]{\frac{2a(r-a)}{b^2}}$
$r = \sqrt{a^2 + 16b^2}$

Aus der Multiplication der Gleichungen ergiebt sich

(1) $$abxy = (x^2+y^2)^3;$$

Aus der Division

$$(x^2 - y^2)^2 = \frac{a}{b}xy(x^2+y^2), \text{ d. h.}$$

(2) $$(x^2+y^2)^2 - 4x^2y^2 = \frac{a}{b}xy(x^2+y^2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) findet man $x^2 + y^2$, wenn man xy eliminirt, und umgekehrt. Man erhält nämlich

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}\sqrt{2a(r-a)} \qquad 2xy = \frac{(r-a)\sqrt{2a(r-a)}}{16b}$$

185. $\left[\begin{array}{c} x + y = \frac{a}{\sqrt{xy}} \\ x^3 + y^3 = \frac{b}{\sqrt{xy}} \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b+r}{2a}} + \sqrt{\frac{7b-r}{6a}}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b+r}{2a}} - \sqrt{\frac{7b-r}{6a}}\right) \end{array}\right\} r = \sqrt{12\alpha^4 + b^2}$

Man kubire die 1. Gleichung, so erhält man mit Benutzung der 2. Gleichung

$$3axy^2 + bxy = a^3,$$

woraus xy zu finden ist.

186. $\left[\begin{array}{l} x + y = \frac{x^2y^2}{a} \\ x^3 + y^3 = b \end{array}\right]$

$$\text{L. } \left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r + 3a} + \sqrt{r - 5a}\right)\sqrt[6]{\frac{r+3a}{16a^2}} \\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r + 3a} - \sqrt{r - 5a}\right)\sqrt[6]{\frac{r+3a}{16a^2}} \end{array}\right\} r = \sqrt{9a^2 + 4ab}$$

Die Auflösung geschieht in ähnlicher Weise, wie bei der vorigen Aufgabe. Man findet zunächst

$$xy = \sqrt[3]{\frac{a(r+3a)}{2}} \text{ u. s. w.}$$

187. $\left[\begin{array}{l} x + y = \frac{x^3y^3}{a} \\ x^3 + y^3 = \frac{b}{xy} \end{array}\right]$

$$\text{L. } \left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{r-5a}{r+3a}}\right)\sqrt[5]{\frac{(r+3a)^3}{8a^2}} \\ y = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{r-5a}{r+3a}}\right)\sqrt[5]{\frac{(r+3a)^3}{8a^2}} \end{array}\right\} r = \sqrt{9a^2 + 4ab}$$

188. $\left[\begin{array}{l} xy(x + y) = a \\ x^4y^4(x^4 + y^4) = b \end{array}\right]$

$$\text{L. } x = \frac{a + \sqrt{2r - 3a^2}}{\sqrt[3]{4(2a^2 - r)}},\quad y = \frac{a - \sqrt{2r - 3a^2}}{\sqrt[3]{4(2a^2 - r)}},$$

$$r = \sqrt{2a^4 + 2b}$$

Am einfachsten erhebt man $x + y$ zur 4. Potenz. Nach I, 376. b. hat man

$$(x + y)^4 = x^4 + y^4 + 4xy(x + y)^2 - 2x^2y^2$$

Hierin sind die Werthe für $x + y$ und $x^4 + y^4$ aus den gegebenen Gleichungen zu substituiren, so erhält man eine quadratische Gleichung für x^3y^3 und

$$xy = \sqrt[3]{\frac{2a^2 - r}{2}}$$

189. $\left[\begin{array}{l} x + y = \frac{a}{x^2 y^2} \\ x^5 + y^5 = b \end{array}\right]$

$$\text{L. } \left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{r - 3a}{r + 5a}}\right)\sqrt[5]{\frac{(r+5a)^2}{4a}} \\ y = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{r - 3a}{r + 5a}}\right)\sqrt[5]{\frac{(r+5a)^2}{4a}} \end{array}\right\} r = \sqrt{5a^2 + 4ab}$$

Nach I, 376. hat man

$$(x + y)^5 = x^5 + y^5 + 5(x + y)^3 xy - 5(x + y) x^2 y^2$$

Hierin für $x + y$ und $x^5 + y^5$ die Werthe aus den gegebenen Gleichungen gesetzt, kommt eine Gleichung für xy, oder besser, um die einfachsten oben angegebenen Formeln für die Unbekannten zu erhalten, für $\frac{1}{xy}$, nämlich

$$\frac{a^5}{(xy)^{10}} - \frac{5a^3}{(xy)^5} = b - 5a$$

$$\frac{1}{xy} = \sqrt[5]{\frac{r + 5a}{2a^3}} \text{ u. s. w.}$$

190. $\left[\begin{array}{l} x + y = \frac{a}{xy} \\ x^5 + y^5 = bxy \end{array}\right]$

$$\text{L. } \left.\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{r + 5a} + \sqrt{r - 3a}}{2\sqrt[6]{4(r + 5a)}} \\ y = \frac{\sqrt{r + 5a} - \sqrt{r - 3a}}{2\sqrt[6]{4(r + 5a)}} \end{array}\right\} r = \sqrt{5a^2 + 4ab}$$

191. $\left[\begin{array}{l} xy(x + y) = a \\ x^5 y^5 (x^5 + y^5) = b \end{array}\right]$

$$\text{L. } \left.\begin{array}{l} x = \frac{a + \sqrt{2r - a^2}}{\sqrt[3]{4(a^2 - r)}} \\ y = \frac{a - \sqrt{2r - a^2}}{\sqrt[3]{4(a^2 - r)}} \end{array}\right\} r = \sqrt{\frac{a^5 + 4b}{5a}}$$

192. $\left[\begin{array}{l} x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + xy^3 + y^4 = a \\ x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - xy^3 + y^4 = b \end{array}\right]$

$$\text{L. } x = \frac{\sqrt{r - 2b} + \sqrt{2a - r}}{2\sqrt[4]{r - a - b}}, \quad y = \frac{\sqrt{r - 2b} - \sqrt{2a - r}}{2\sqrt[4]{r - a - b}}$$

$$r = \sqrt{5a^2 - 6ab + 5b^2}$$

Durch Addition und Subtraction ergeben sich die Gleichungen

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = \tfrac{1}{2}(a + b)$$
$$xy(x^2 + y^2) = \tfrac{1}{2}(a - b)$$

Hieraus findet man

$$x^2y^2 = \frac{r - a - b}{4},\ 2xy = \sqrt{r - a - b},\ x^2 + y^2 = \frac{a - b}{\sqrt{r - a - b}}$$

Verfährt man wie in 182., so erhält man

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[4]{\frac{5r + 5a - 11b}{4}} + \sqrt[4]{\frac{5r - 11a + 5b}{4}}\right) \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichungen lassen sich auch so schreiben:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^5 - y^5}{x - y} = a \\ \dfrac{x^5 + y^5}{x + y} = b \end{array}\right]$$

193. $\left[\begin{array}{l} x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = a \\ x^8 + x^4y^2 + x^4y^4 + x^2y^6 + y^8 = b \end{array}\right]$

L. $x = \dfrac{\sqrt{r - 2b} + \sqrt{2a^2 - r}}{2\sqrt[4]{a(r - a^2 - b)}},\ y = \dfrac{\sqrt{r - 2b} - \sqrt{2a^2 - r}}{2\sqrt[4]{a(r - a^2 - b)}}$

$$r = \sqrt{5a^4 - 6a^2b + 5b^2}$$

Man kann die 1. Gleichung in die 2. dividiren und erhält die Aufgabe 192. wenn man dort $\frac{b}{a}$ statt b setzt.

194. $\left[\begin{array}{l} (x + y)^4 = a(x^2 + y^2) \\ x^4 + y^4 = b(x^2 + y^2) \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{r - a} + \sqrt{7a + 4b - 5r}\right) \\ y = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{r - a} - \sqrt{7a + 4b - 5r}\right) \end{array}\right\}\ r = \sqrt{2a(a + b)}$

Nach 114. b. kann man die Gleichungen mit solchen Factoren multipliciren, dass bei der Addition $x^2 + y^2$ sich als Factor fort-hebt. Man schreibt die Gleichungen zu dem Zwecke so:

(1) $\left[\begin{array}{c} (x^2 + y^2)^2 + 4xy(x^2 + y^2) + 4x^2y^2 = a(x^2 + y^2) \\ (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = b(x^2 + y^2) \end{array}\right]$

Es ist also nur x^2y^2 zu eliminiren. Das giebt

$$3(x^2 + y^2) + 4xy = a + 2b$$

Diese Gleichung ist mit einer der Gleichungen in (1) zu combiniren und $x^2 + y^2$ und xy zu bestimmen.

195. $\left[\begin{array}{c} xy(x^2 + y^2) = a(x + y)^2 \\ x^4 + y^4 = 2b(x + y)^2 \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{4a - b + 3r} + \sqrt{3b - r}\right) \\ y = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{4a - b + 3r} - \sqrt{3b - r}\right) \end{array}\right\}\ r = \sqrt{2a^2 + b^2}$

Man addire die beiden Gleichungen, so kann man durch $(x+y)^2$ heben und erhält $x^2 - xy + y^2 = a + 2b$

196. $\left[\begin{array}{c}(x+y)^4 = a\,(x^2 - xy + y^2)\\ xy\,(x^2+y^2) = b\,(x^2 - xy + y^2)\end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}\left(\sqrt{a+3r} + \sqrt{3a-24b+r}\right)\\ y = \frac{1}{4}\left(\sqrt{a+3r} - \sqrt{3a-24b+r}\right)\end{array}\right\}\ r = \sqrt{a^2 - 8ab}$

Hier kommt man zunächst auf $x^2 - 4xy + y^2 = a - 9b$. — Setzt man in den für die Unbekannten gefundenen Formeln $8b = \frac{a^2 - r^2}{a}$, so erhält man

$$x = \tfrac{1}{4}\left(1 + \sqrt{\tfrac{r}{a}}\right)\sqrt{a+3r}$$

$$y = \tfrac{1}{4}\left(1 - \sqrt{\tfrac{r}{a}}\right)\sqrt{a+3r}$$

197. $\left[\begin{array}{l}x^4 + y^4 = a\,(x+y)^2\\ x^5 + y^5 = b\,(x+y)^3\end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{10a - 14b + 5r} + \sqrt{2b - r}\right)$

$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{10a - 14b + 5r} - \sqrt{2b - r}\right)$

$r = \sqrt{5a^2 - 12ab + 8b^2}$

198. $\left[\begin{array}{c}\left(\frac{x+y}{x-y} + 1 + \frac{x-y}{x+y}\right)\left(\frac{x+y}{x-y} - 1 + \frac{x-y}{x+y}\right) = \frac{(x^2-y^2)^2}{a}\\ \left(\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}\right)^2 = \frac{x^2-y^2}{b}\end{array}\right]$

L. $x = \frac{3a\sqrt{b}}{2\,(2a-r)}$, $y = \frac{\sqrt{3ab\,(4r-5a)}}{2\,(2a-r)}$, $r = \sqrt{a^2 + 3ab^2}$

Durch Division des Quadrates der 2. Gleichung in die 1. Gleichung erhält man eine Gleichung, aus der man $\frac{y}{x}$ finden kann. Sie liefert

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{4r-5a}{3a}}$$

---

199. $\left[\begin{array}{c}(x^2 - x + 1)\,(y^2 - y + 1) = 3\\ (x+1)\,(y+1) = 6\end{array}\right]$

L. $x = 2,\ 1,\ 1 + \sqrt{-2}$

$y = 1,\ 2,\ 1 - \sqrt{-2}$

Wenn man in der 1. Gleichung $x + y$ und $x^2 + y^2$ durch xy mit Hülfe der 2. Gleichung ausdrückt, erhält man eine quadratische Gleichung für xy.

200. $\left[\begin{matrix}(x^2 - y + 1)\,(y^2 - x + 1) = 16 \\ x + y = 5\end{matrix}\right]$

L. $x = 3,\ 2,\ \frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{105}\right)$
$y = 2,\ 3,\ \frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{105}\right)$

201. $\left[\begin{matrix}x^2 + y = 5\ (x - y) \\ x + y^2 = 2\ (x - y)\end{matrix}\right]$

L. $x = 0,\ -1,\ 3,\ +8$
$y = 0,\ -1,\ 1,\ -4$

Die aus der Subtraction der Gleichungen entstehende Gleichung lässt sich zerlegen in

1. $x - y = 0$ 2. $x + y - 1 = 3$

202. $\left[x^2 + y = x + y^2 = a\right]$

L. $x = \frac{-1 + \sqrt{4a+1}}{2},\ \frac{1 + \sqrt{4a-3}}{2}$
$y = \frac{-1 + \sqrt{4a+1}}{2},\ \frac{1 - \sqrt{4a-3}}{2}$

203. $\left[x^2 + y = x + y^2 = a\,(x + y)\right]$

L. $x = 0,\ 2a - 1,\ \frac{1 + \sqrt{4a-3}}{2}$
$y = 0,\ 2a - 1,\ \frac{1 - \sqrt{4a-3}}{2}$

204. $\left[x^2 + y = x + y^2 = \frac{13}{3}\,xy\right]$

L. $x = 0,\ \frac{3}{10},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{4}$
$y = 0,\ \frac{3}{10},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}$

205. $\left[x^2 + y = x + y^2 = \frac{13}{10}\,(x^2 + y^2)\right]$

L. $x = 0,\ \frac{5}{8},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{4}$
$y = 0,\ \frac{5}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}$

206. $\left[\begin{matrix}x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 5\end{matrix}\right]$

L. $x = 2,\ 1,\ 1 + \sqrt{-2}$
$y = 1,\ 2,\ 1 - \sqrt{-2}$

Aus der Formel für den Kubus

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y)$$

folgt durch Elimination von $x + y$ und $x^3 + y^3$ mit Hülfe der gegebenen Gleichungen eine Gleichung für xy. Diese liefert $xy = 2,\ 3$. — Uebrigens ist diese Aufgabe nicht von der Auf-

gabe 199. verschieden. Diese Gleichungen lassen sich auf die dort angegebene Form bringen, und umgekehrt.

207. $\left[\begin{array}{c} x^4 + x^4y^4 + y^4 = a \\ x - xy + y = 1 \end{array}\right]$

L. $x = 1,\ \sqrt[4]{\frac{a-1}{2}} \qquad y = \sqrt[4]{\frac{a-1}{2}},\ 1$

Die 2. Gleichung lässt sich zerlegen in

1. $x - 1 = 0$ 2. $y - 1 = 0$

Diese Gleichungen sind einzeln mit der 1. Gleichung zu combiniren.

208. $\left[\begin{array}{c} x^4 - a^4x^4 + a^4 = y \\ x - ax + a = 1 \end{array}\right]$

L. $x = y = 1$

209. $\left[x - \frac{1}{y} = y - \frac{1}{x} = a\right]$

L. $x = y = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$

210. $\left[\begin{array}{c} ax = \frac{y+1}{y-1} \\ bx^3 + cx = \frac{y^3+1}{(y-1)^3} \end{array}\right]$

L. $x = 0,\ r \qquad y = -1,\ \frac{ar+1}{ar-1} \qquad r = \sqrt{\frac{4c-3a}{a^3-4b}}$

Man hat aus der 1. Gleichung

$$y = \frac{ax+1}{ax-1}.$$

Dies ist in der 2. Gleichung zu substituiren, so kann man x bestimmen.

211. $\left[\begin{array}{l} x^2 + xy + y^2 = (a+b)(x+y) \\ x^2 - xy + y^2 = (a-b)(x-y) \end{array}\right]$

L. $x = a - \sqrt[3]{ab^2}, \qquad y = b - \sqrt[3]{a^2b}$

Aus der Division der Gleichungen in einander ergiebt sich leicht das Verhältniss der Unbekannten.

212. $\left[\begin{array}{c} x + \sqrt{xy} + y = (a-b)\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\ x - \sqrt{xy} + y = a + b \end{array}\right]$

L. $x = a + \sqrt[3]{a^2b},\ y = b + \sqrt[3]{ab^2}$

213. $\left[\begin{matrix} x^2 + 3y^2 = (a + b)\ y \\ 3x^2 + y^2 = (a - b)\ x \end{matrix}\right]$

L. $x = \frac{1}{4}\left(a - b - \sqrt[3]{a^2 b} - \sqrt[3]{a b^2}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}\right)$

$y = \frac{1}{4}\left(a + b - \sqrt[3]{a^2 b} - \sqrt[3]{a b^2}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}\right)$

Man multiplicire die 1. Gleichung mit x, die 2. mit y, so erhält man durch Addition und Subtraction

$$\left[\begin{matrix} (x + y)^3 = 2axy \\ (x - y)^3 = 2bxy \end{matrix}\right]$$

Diese Gleichungen sind in einander zu dividiren, dann ist die Kubikwurzel zu ziehen u. s. w.

214. $\left[\begin{matrix} x\sqrt[3]{\frac{y}{x}} + y\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{a+b}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} \\ x\sqrt[3]{\frac{y}{x}} - y\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{a-b}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} \end{matrix}\right]$

L. $x = \frac{a}{\sqrt[5]{ab}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt[5]{ab}}$

Sondert man links $\sqrt[3]{xy}$ und bringt die Nenner von rechts nach links, so erhält man

$$\left[\begin{matrix} (x + y)\sqrt[3]{xy} = a + b \\ (x - y)\sqrt[3]{xy} = a - b \end{matrix}\right]$$

Daraus lässt sich leicht $\frac{x}{y}$ bestimmen.

215. $\left[\begin{matrix} x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - xy^3 + y^4 = \frac{a}{x+y} \\ x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + xy^3 + y^4 = \frac{b}{x-y} \end{matrix}\right]$

L. $x = \sqrt[5]{\frac{a+b}{2}}, \quad y = \sqrt[5]{\frac{a-b}{2}}$

216. $\left[\begin{matrix} x^4 + x^2 y^2 + y^4 = \frac{ax - by}{x^2 - y^2} \\ xy\,(x^2 + y^2) = \frac{ay - bx}{x^2 - y^2} \end{matrix}\right]$

L. $x = \sqrt[5]{a} \qquad y = \sqrt[5]{b}$

Durch Addition und Subtraction der beiden Gleichungen kommt man leicht auf

$$\left[\begin{matrix} x^5 - y^5 = a - b \\ x^5 + y^5 = a + b \end{matrix}\right]$$

217. $$\left[\begin{array}{c} x^8 + x^6y^2 + x^4y^4 + x^2y^6 + y^8 = \frac{a^2}{x^2 - y^2} \\ x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = \frac{b}{x - y} \end{array}\right]$$

L. $x = \sqrt[5]{\frac{a^2 + b^2}{2b}}$, $y = \sqrt[5]{\frac{a^2 - b^2}{2b}}$

Man bringe die Nenner nach links, so giebt das

$$\left[\begin{array}{c} x^{10} - y^{10} = a^2 \\ x^5 - y^5 = b \end{array}\right]$$

Die 2. Gleichung in die 1. dividirt u. s. w.

218. $$\left[\begin{array}{c} (x + y)(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) + \sqrt[3]{x^2y^2} = (a + b)(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) \\ (x - y)(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}) + \sqrt[3]{x^2y^2} = (a - b)(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}) \end{array}\right]$$

L. $x = a - \sqrt[5]{a^3b^2}$ $\quad y = b - \sqrt[5]{a^2b^3}$

Man multiplicire die 1. Gleichung mit $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$, die 2. mit $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$. Löst man die Klammern auf, so übersieht man leicht, dass man erhält

$$\left[\begin{array}{c} \sqrt[3]{x^5} - \sqrt[3]{y^5} = (a + b)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2}) \\ \sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5} = (a - b)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2}) \end{array}\right]$$

Die Division dieser Gleichungen in einander liefert leicht den Quotienten

$$\frac{x}{y} = -\frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{b^3}}$$

219. $$\left[\begin{array}{c} x^8 + y^8 = (a + b)(x - y) \\ (x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) = a - b \end{array}\right]$$

L. $x = \sqrt[8]{a} \cdot \sqrt[7]{\sqrt[8]{a} - \sqrt[8]{b}}$ $\quad y = \sqrt[8]{b} \cdot \sqrt[7]{\sqrt[8]{a} - \sqrt[8]{b}}$

Die Division der Gleichungen in einander führt leicht auf den Quotienten der Unbekannten.

220. $$\left[\begin{array}{c} (x + y)^3(x^3 + y^3) + (x - y)^3(x^3 - y^3) = 2a^3 \\ x + y = b \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1}{2}(b + \sqrt{2a - b^2})$ $\quad y = \frac{1}{2}(b - \sqrt{2a - b^2})$

Die imaginären Werthe von $\sqrt[3]{a^3}$ sind nicht mitgerechnet. — Aus der 1. Gleichung findet man $x^2 + y^2 = a$. Das ist mit der 2. Gleichung zu combiniren.

221. $$\left[\begin{array}{c} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = x - y \\ \frac{x}{y} \cdot \frac{xy+1}{xy-1} = a \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{r+1}{r-1} \cdot \sqrt{r}$, $y = \frac{r+1}{r-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}$, $r = \sqrt{2a-1}$

Aus der 1. Gleichung folgt

$$\sqrt{xy} = \frac{x+y}{x-y}, \quad xy = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2.$$

Dies ist in die 2. Gleichung einzusetzen. Dann findet man

$$\frac{x}{y} = r, \text{ also}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{r}, \quad \sqrt{xy} = \frac{r+1}{r-1} \text{ u. s. w.}$$

222. $$\left[\begin{array}{c} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = x - y \\ \frac{x}{y} \cdot \frac{\sqrt{xy}+1}{\sqrt{xy}-1} = a \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \cdot \sqrt[4]{a}$, $y = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{a}}$

223. $$\left[\begin{array}{c} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = x - y \\ \frac{x}{y} \cdot \frac{xy - \sqrt{xy}+1}{xy + \sqrt{xy}+1} = a \end{array}\right]$$

L. $x = r \cdot \sqrt{\frac{r+1}{r-1}}$, $y = r\sqrt{\frac{r-1}{r+1}}$, $r = \sqrt[3]{\frac{a+1}{a-1}}$

Setzt man für $\frac{x}{y}$ seinen Werth aus der 1. Gleichung in die 2. Gleichung, so erhält man

$$\frac{xy\sqrt{xy}+1}{xy\sqrt{xy}-1} = a, \text{ also } \sqrt{xy} = r \text{ u. s. w.}$$

224. $$\left[\begin{array}{c} x^2 + y^2 = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \\ \frac{x^4}{y^4} \cdot \frac{1 + x^2y^2}{(1+xy)^2} = a \cdot \frac{1+xy}{1-xy} \end{array}\right]$$

L. $x = \sqrt[4]{\frac{a-1}{a+1}(a+r)}$, $y = \sqrt[4]{\frac{a-1}{a+1}(a-r)}$, $r = \sqrt{a^2-1}$

Man erhält zunächst durch Elimination von $\frac{x^4}{y^4}$ für xy die Gleichung

$$\frac{1+x^2y^2}{1-x^2y^2} = a, \text{ also } xy = \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \text{ u. s. w.}$$

225. $$\left[\begin{array}{c} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = x - y \\ \frac{x}{y} \cdot \frac{x^2y^2\sqrt{xy} - 1}{x^2y^2\sqrt{xy} + 1} = a \end{array}\right]$$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{u+1}{u-1}\sqrt{u} \\ y = \frac{u+1}{u-1}\frac{1}{\sqrt{u}} \end{array}\right\}$ für $u = \sqrt{\frac{5(a-1) + 2\sqrt{5a^2 - 6a + 5}}{5-a}}$

Man setze aus der 1. Gleichung für $\sqrt{xy}$ den Werth in die 2. Gleichung. Das giebt

$$\frac{5x^4 + 10x^2y^2 + y^4}{x^4 + 10x^2y^2 + 5y^4} = a, \text{ d. h.}$$

$$(5 - a)\frac{x^4}{y^4} - 10(a - 1)\frac{x^2}{y^2} = 5a - 1$$

$$\frac{x}{y} = u, \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{u} \text{ u. s. w.}$$

226. $$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \\ \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} = b \end{array}\right]$$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{u}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4a}{u}}\right) \\ y = \frac{u}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4a}{u}}\right) \end{array}\right\}$ $u = 2a - b^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2 - ab^2}$

Wenn man aus der 2. Gleichung die Wurzeln fortschafft und die 1. Gleichung benutzt, erhält man leicht quadratische Gleichungen für $x + y$ und xy. Diese liefern

$$x + y = u, \text{ also } xy = au.$$

Daraus sind die Unbekannten selber hinzuschreiben.

227. $$\left[\begin{array}{c} \sqrt{x(1-y)} + \sqrt{y(1-x)} = a \\ x + y = b \end{array}\right]$$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(b + ar) \\ y = \frac{1}{2}(b - ar) \end{array}\right\}$ $r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - b}{a^2 - 1}}$

Am einfachsten sucht man zunächst

$$x - y = ar, \text{ oder } 4xy = \frac{(a^2 - b)^2}{1 - a^2}$$

28. $$\left[\begin{array}{c} x + y = a \\ \sqrt{x(1-x)} + \sqrt{y(1-y)} = b \end{array}\right]$$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(a + br) \\ y = \frac{1}{2}(a - br) \end{array}\right\}$ $r = \sqrt{\frac{1}{(a-1)^2 + b^2} - 1}$

Man suche zunächst das Product

$$4xy = \frac{(a^2 + b^2 - a)^2}{(a-1)^2 + b^2}$$

Dies mit der 1. Gleichung combinirt, liefert $x - y = r$ u. s. w.

229. $\left[\begin{matrix} \sqrt{3 - x + \frac{1}{4}x^2} + \sqrt{3 - y + \frac{1}{4}y^2} = 3 \\ x + y = 4 \end{matrix}\right]$

L. $x = 3,\ 1 \qquad y = 1,\ 3$

230. $\left[\sqrt{5 - 3x + x^2} + \sqrt{5 - 3y + y^2} = 2\,(x + y) = 6\right]$

L. $x = 4,\ -1 \qquad y = -1,\ 4$

231. $\left[\begin{matrix} \sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{b + y} = c \\ x + y = d \end{matrix}\right]$

L. $\left.\begin{matrix} x = \frac{1}{8}(c + r)^3 - a \\ y = \frac{1}{8}(c - r)^3 - b \end{matrix}\right\} r = \sqrt{\frac{4\,(a + b + d) - c^3}{3c}}$

Man suche zunächst die Differenz der Kubikwurzeln, deren Summe gegeben ist. Zu dem Zwecke setzt man

$$\sqrt[3]{a + x} - \sqrt[3]{b + y} = z$$

Dies mit der 1. Gleichung combinirt, liefert

(1) $\qquad \sqrt[3]{a + x} = \frac{c + z}{2} \qquad \sqrt[3]{b + y} = \frac{c - z}{2}$

Dies kubirt und addirt, giebt mit Benutzung der 2. Gleichung $z = r$. Dann folgen aus (1) die Unbekannten selber in der angegebenen Form.

232. $\left[\begin{matrix} x + y = a \\ (b + x)^3 + (c + y)^3 = d \end{matrix}\right]$

L. $\left.\begin{matrix} x = \frac{1}{2}(a - b + c + r) \\ y = \frac{1}{2}(a + b - c - r) \end{matrix}\right\} r = \sqrt{\frac{4d - (a + b + c)^3}{3\,(a + b + c)}}$

In der 2. Gleichung kommen $b + x$ und $c + y$ vor. Aus der 1. Gleichung hat man aber

(1) $\qquad (b + x) + (c + y) = a + b + c$

Man wird daher zunächst suchen

(2) $\qquad (b + x) - (c + y) = z$

Aus (1) und (2) folgt, wenn der Kürze wegen $a + b + c = m$ gesetzt wird,

(3) $\qquad b + x = \frac{m + z}{2} \qquad c + y = \frac{m - z}{2}$

Dies ist in der 2. Gleichung zu substituiren, so erhält man $z = r$. Dann folgen aus (3) die Unbekannten selber.

233. $$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2+y^2}{x+y} = a \\ \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3} = b \end{array}\right]$$

$$\text{L. } x = \frac{2a+b-r}{4}\left(1+\sqrt{\frac{2a-b+r}{2a+b-r}}\right)$$

$$y = \frac{2a+b-r}{4}\left(1-\sqrt{\frac{2a-b+r}{2a+b-r}}\right)$$

$$r = \sqrt{8a^2-8ab+b^2}$$

a. Wollte man direct eine der Unbekannten suchen, indem man die andere eliminirt, so würde das eine Gleichung des 4. Grades*) liefern, die, abgesehen von dem Umständlichen einer solchen Elimination, unangenehmer zu lösen wäre, als die gegebenen Gleichungen selber. Man führt daher einen geeigneten Ausdruck von x und y als neue Unbekannte ein, um diese zunächst zu bestimmen und mit ihrer Hülfe die ursprünglichen Unbekannten x und y. Geeignet ist ein solcher Ausdruck dann, wenn sich vermittelst desselben einerseits alle in den Gleichungen vorkommenden andern Ausdrücke von x und y, und andrerseits die ursprünglichen Unbekannten x und y selbst leicht darstellen lassen. — Wegen der 1. Gleichung wären folgende Substitutionen die nächst liegenden

1. $x+y=z$
2. $x^2+y^2=z$
3. $\frac{2xy}{x+y}=z$
4. $\frac{x^2+y^2}{x-y}=z$

In jedem Falle erhält man für die neue Unbekannte z eine quadratische Gleichung und in jedem Falle lassen sich auch x und y selber leicht bestimmen, wenn z gefunden ist. Der Anfänger wird also nicht leicht fehlgreifen können. — Nimmt man Beispiels halber die 3. Substitution

$$\text{(1)} \qquad \frac{2xy}{x+y}=z,$$

so giebt diese, mit der 1. gegebenen Gleichung combinirt,

---

*) $2x^4-2(2a+b)x^3+(2a^2+3ab+b^2)x^2+ab(a-3b)x+a^2(a^2-4ab+3b^2)=0.$

$$x + y = a + z \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 = a\,(a + z) \tag{3}$$

$$2xy = z\,(a + z) \tag{4}$$

Hieraus sind jetzt die Ausdrücke $x^4 + y^4$ und $x^3 + y^3$ zu bilden, um die 2. Gleichung zu benutzen und z zu bestimmen. Man findet

$$x^4 + y^4 = (a^2 - \tfrac{1}{2} z^2)\,(a + z)^2$$

$$x^3 + y^3 = (a - \tfrac{1}{2} z)\,(a + z)^2$$

Dies in die 2. Gleichung eingesetzt, liefert

$$\frac{2a^2 - z^2}{2a - z} = b$$

$$z = \frac{b - r}{2}. \tag{5}$$

Das r hat eigentlich beide Zeichen; hier ist nur das negative gesetzt, um die Identität mit den folgenden Formeln herzustellen. — Jetzt sind noch x und y durch z auszudrücken. Aus (2), (3) und (4) folgt

$$x + y = a + z$$

$$x - y = \sqrt{(a + z)\,(a - z)}$$

Mithin hat man für die Unbekannten, ausgedrückt durch z,

$$x = \frac{a + z}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{a - z}{a + z}}\right)$$

$$y = \frac{a + z}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{a - z}{a + z}}\right) \tag{6}$$

Setzt man hierin für z den in (5) gefundenen Werth, so erhält man die oben für die Unbekannten angegebenen Formeln.

Ganz ähnlich würde man bei den andern Substitutionen zu verfahren haben. Man hat erstens die neue Unbekannte zu suchen, indem man die ursprünglichen eliminirt, und zweitens die ursprünglichen Unbekannten durch die neue auszudrücken. Dabei können freilich schliesslich, jenachdem man diesen oder jenen Weg einschlägt, diesen oder jenen Ausdruck von x und y als neue Unbekannte einführt, die Lösungen in verschiedenen Formen erscheinen. Diese müssen jedoch alle identisch sein, wenn auch die Identität nicht immer auf der Hand liegt. Bei numerischen Gleichungen freilich kann von einer besondern Form der Lösung nicht die Rede sein.

b. Ein allgemeinerer Weg, auf dem sich zugleich alle möglichen Darstellungen von x und y leicht ergeben, ist der folgende.

Man sucht durch Combination der beiden gegebenen Gleichungen auf eine neue Gleichung zu kommen von der Form

$$(7) \qquad \frac{mx^4 + nx^3y + px^2y^2 + nxy^3 + my^4}{m_1x^4 + n_1x^3y + p_1x^2y^2 + n_1xy^3 + m_1y^4} = \frac{a}{b}$$

(vgl. I, 406. c.). Macht man gleichnamig und bringt auf Null, so ergiebt sich eine Gleichung von der Form

$$(8) \qquad Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Bxy^3 + Ay^4 = 0,$$

d. h. eine in Bezug auf x und y symmetrische, homogene Gleichung des 4. Grades (s. I, 394. b.). Aus einer solchen Gleichung lässt sich das Verhältniss der Unbekannten leicht und auf demselben Wege bestimmen, auf dem oben in den Aufgaben I, 394. ff. x gefunden wurde. Man kann entweder

$$(9) \qquad \frac{x+y}{x-y} = t$$

setzen und dies zunächst bestimmen, oder auch

$$(10) \qquad \frac{x^2+y^2}{xy} = u.$$

In der Regel wird man wohl u schneller finden als t. Aus (9) hat man

$$(11) \qquad \frac{x}{y} = \frac{t+1}{t-1},$$

wird mithin setzen können

$$(12) \qquad x = \lambda(t+1) \qquad y = \lambda(t-1).$$

Die Gleichung (8) geht daher, wenn man die Glieder mit gleichen Coefficienten zusammenzieht, über in

$$2A(t^4 + 6t^2 + 1) + 2B(t^4 - 1) + C(t^2 - 1)^2 = 0$$

$$(2A + 2B + C)t^4 + 2(6A - C)t^2 + 2A - 2B + C = 0$$

Diese Gleichung liefert t, also wegen (11) auch $\frac{x}{y}$. Wie dann weiter zu verfahren ist, ist schon oft genug gezeigt.

Will man nach (10) zunächst u suchen, so schreibt man (2) in dieser Weise

$$A(x^2 + y^2)^2 + Bxy(x^2 + y^2) + (C - 2A)x^2y^2 = 0$$

und erhält für u die Gleichung

$$(13) \qquad Au^2 + Bu + C - 2A = 0$$

Diese Gleichung giebt u. Dann folgt aus (10) nach I, 18. durch corr. Add.

$$(14) \qquad \frac{x+y}{x-y} = \sqrt{\frac{u+2}{u-2}}$$

$$(15) \qquad \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{u+2}+\sqrt{u-2}}{\sqrt{u+2}-\sqrt{u-2}}$$

Auch in diesem Falle kommt man auf $\frac{x+y}{x-y}$ und dann auf $\frac{x}{y}$. —

Bei den meisten Gleichungen wird man jedoch nicht erst die Gleichung (8) zu entwickeln haben, sondern kann die Grösse t oder u direct einsetzen.

c. Für die hier oben in 233. gegebenen Gleichungen ist also zunächst die der Gleichung (7) entsprechende zu suchen. Man dividirt dieselben in einander und erhält

$$(16) \qquad \frac{(x^2+y^2)\,(x^2-xy+y^2)}{x^4+y^4} = \frac{a}{b}$$

Wegen (11) oder (12) ergiebt sich hieraus für t die Gleichung

$$\frac{(t^2+1)\,(t^2+3)}{t^4+6t^2+1} = \frac{a}{b}$$

$$(a-b)\,t^4 + 2\,(3a-2b)\,t^2 + (a-3b) = 0$$

$$(17) \qquad t = \sqrt{\frac{-3a+2b+r}{a-b}} = \sqrt{\frac{3b-a}{3a-2b+r}}$$

$$\text{für } r = \sqrt{8a^2-8ab+b^2}$$

(vgl. I, 394.). — Will man zunächst u nach (4) bestimmen, so ist der Ausdruck links in (16) so umzuformen, dass nur x^2+y^2 und xy vorkommen. Setzt man dann $x^2+y^2 = xy\cdot u$, so hebt sich xy überall heraus. Hier hat man

$$\frac{(x^2+y^2)\,(x^2+y^2-xy)}{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{u\,(u-1)}{u^2-2} = \frac{a}{b}$$

$$u^2\,(b-a) - bu + 2a = 0$$

$$u = \frac{b+r}{2\,(b-a)} = \frac{4a}{b-r}$$

Also nach (10)

$$\frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{b+r}{4\,(b-a)} = \frac{2a}{b-r}$$

Daher durch corr. Add. und Benutzung von (9)

$$(18) \qquad t = \sqrt{\frac{-4a+5b+r}{4a-3b+r}} = \sqrt{\frac{2a+b-r}{2a-b+r}}$$

d. In (17) und (18) sind 4 Formeln für t gefunden. Nach dem Correspondenzsatz (I, 283. d.) lassen sich aus zwei derselben auch die beiden andern ableiten, wie noch beliebig viele andere. Hieran knüpft sich nun die Frage: Welche Bedeutung oder besondere Eigenschaft hat jede Formel für t?

Die Formeln für

$$t \text{ oder } \frac{x+y}{x-y}$$

sind zwar gefunden aus der Gleichung (16); die folgenden Auseinandersetzungen gelten jedoch ganz allgemein, als wenn t aus der allgemeinen Gleichung (7) abgeleitet wäre.

Mit t kennt man das Verhältniss

$$\frac{x}{y} = \frac{t+1}{t-1},$$

hat also in einer der gegebenen Gleichungen zu setzen

$$(19) \qquad x = \lambda(t+1) \qquad y = \lambda(t-1)$$

und λ zu bestimmen, so sind damit auch x und y gefunden.

Es sei die eine der gegebenen Gleichungen

$$(20) \qquad x - y = c.$$

Dann wird man für t diejenige Formel zu nehmen haben, die bei der Substitution von (19) für λ einen möglichst einfachen Ausdruck ergiebt; denn so werden auch die Ausdrücke für x und y möglichst einfach sein. Einfach nennt man aber den Ausdruck für λ besonders dann, wenn er keine Wurzel im Nenner, also zunächst kein r im Nenner enthält. Aus (19) und (20) folgt

$$2\lambda = c, \quad \lambda = \frac{c}{2}, \text{ also}$$

$$x = \frac{c}{2}(t+1) \qquad y = \frac{c}{2}(t-1)$$

Man hat daher, um das r im Nenner zu vermeiden, wenn die Gleichung (20) gegeben, d. h. wenn $x - y$ bekannt ist, für t die 1. Formel in (17) zu nehmen,

$$(21) \qquad t = \sqrt{\frac{-3a+2b+r}{a-b}}.$$

Dann wird für (20)

$$x = \frac{c}{2}\left(\sqrt{\frac{-3a+2b+r}{a-b}} + 1\right), \; y = \frac{c}{2}\left(\sqrt{\frac{-3a+2b+r}{a-b}} - 1\right)$$

Würde eine der gegebenen Gleichungen

$$(22) \qquad x + y = c$$

sein, so hätte man aus demselben Grunde für t die 2. Formel in (17) zu wählen,

$$(23) \qquad t = \sqrt{\frac{3b-a}{3a-2b+r}},$$

und würde erhalten

$$x = \frac{c}{2}\left(1+\sqrt{\frac{3a-2b+r}{3b-a}}\right),\ y = \frac{c}{2}\left(1-\sqrt{\frac{3a-2b+r}{3b-a}}\right)$$

Wenn eine der gegebenen Gleichungen

$$(24) \qquad x^2+y^2 = c$$

wäre, so hätte man für t, um für λ und somit auch für x und y möglichst einfache Ausdrücke zu erhalten, die 2. Formel in (18) zu nehmen,

$$(25) \qquad t = \sqrt{\frac{2a+b-r}{2a-b+r}},$$

also zu setzen

$$x = \lambda\left(\sqrt{2a+b-r}+\sqrt{2a-b+r}\right)$$
$$y = \lambda\left(\sqrt{2a+b-r}-\sqrt{2a-b+r}\right)$$

Dann würde aus (24) folgen

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{2a}},$$

so dass also λ kein r enthält, und es würde sein

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2a+b-r}+\sqrt{2a-b+r}\right)\sqrt{\frac{c}{2a}} \text{ u. s. w.}$$

Ganz ebenso würde, wenn

$$(26) \qquad xy = c$$

eine der gegebenen Gleichungen wäre, für t die 1. Formel in (18),

$$(27) \qquad t = \sqrt{\frac{-4a+5b+r}{4a-3b+r}},$$

zu nehmen sein, um dieselbe Einfachheit für λ und somit auch für x und y zu erzielen.

Zur leichtern Orientirung und Uebersicht sollen die verschiedenen Formeln für t durch t mit einem Index bezeichnet werden:

$$t_{x-y} \qquad t_{x+y} \qquad t_{x^2+y^2} \qquad t_{xy}$$

Der angegebenen Bedeutung zufolge wird man daher zweckmässig als Bezeichnung setzen:

(28) $t_{x-y} = \sqrt{\frac{-3a+2b+r}{a-b}}$ nach (20) und (21)

(29) $t_{x+y} = \sqrt{\frac{3b-a}{3a-2b+r}}$ „ (22) „ (23)

(30) $t_{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{2a+b-r}{2a-b+r}}$ „ (24) „ (25)

(31) $t_{xy} = \sqrt{\frac{-4a+5b+r}{4a-3b+r}}$ „ (26) „ (27)

Die 1. Formel (28) für $t = \frac{x+y}{x-y}$ ist also desshalb mit t_{x-y} bezeichnet worden, weil sie für die Gleichung $x - y = c$ die Unbekannten x und y in Ausdrücken liefert, die kein r im Nenner enthalten u. s. w.

Dass der Index sich nur auf die Form bezieht und nicht auf den Werth, ist nach dem Obigen von selbst einleuchtend. Alle tt sind dem Werthe nach einander gleich, also

$$t_{x-y} = t_{x+y} = t_{x^2+y^2} = t_{xy}.$$

e. Ueber den Zusammenhang der tt unter einander lässt sich Folgendes bemerken. Es werde gesetzt:

(32) $t_{x-y} = \sqrt{\frac{A}{A_1}}$ $t_{x+y} = \sqrt{\frac{B}{B_1}}$

$t_{xy} = \sqrt{\frac{C}{C_1}}$ $t_{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{D}{D_1}}$,

wo also wegen der Gleichungen (28) bis (31) ist:

(33)
$$\begin{aligned} A &= -3a+2b+r & A_1 &= a-b \\ B &= 3b-a & B_1 &= 3a-2b+r \\ C &= -4a+5b+r & C_1 &= 4a-3b+r \\ D &= 2a+b-r & D_1 &= 2a-b+r \end{aligned}$$

Dann stellt sich der Zusammenhang der Formeln für t so dar:

(34)
$$\begin{aligned} t_{xy} &= \sqrt{\frac{C}{C_1}} = \sqrt{\frac{B+A}{B_1+A_1}} \\ t_{x^2+y^2} &= \sqrt{\frac{D}{D_1}} = \sqrt{\frac{B-A}{B_1-A_1}} \\ t_{x-y} &= \sqrt{\frac{A}{A_1}} = \sqrt{\frac{C-D}{C_1-D_1}} \\ t_{x+y} &= \sqrt{\frac{B}{B_1}} = \sqrt{\frac{C+D}{C_1+D_1}} \end{aligned}$$

und allgemein

$$(35) \qquad {}^{t}_{\beta x^2 + \beta_1 xy + \beta y^2} = \sqrt{\frac{2\beta D + \beta_1 C}{2\beta D_1 + \beta_1 C_1}} = \sqrt{\frac{(2\beta + \beta_1) B - (2\beta - \beta_1) A}{(2\beta + \beta_1) B_i - (2\beta - \beta_1) A_1}}$$

Die Beweise für die ersten 4 Formeln liegen auf der Hand. Die Bezeichnung in (35) ist dann richtig, wenn die Formel, für die Gleichung

$$(36) \qquad \beta x^2 + \beta_1 xy + \beta y^2 = c$$

benutzt, für λ kein r im Nenner giebt. Man hat nach (35) zu setzen

$$x = \lambda \left(\sqrt{2\beta D + \beta_1 C} + \sqrt{2\beta D_1 + \beta_1 C_1}\right)$$
$$y = \lambda \left(\sqrt{2\beta D + \beta_1 C} - \sqrt{2\beta D_1 + \beta_1 C_1}\right)$$

Hieraus folgt

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 \left[4\beta (D + D_1) + 2\beta_1 (C + C_1)\right]$$
$$xy \quad = \lambda^2 \left[2\beta (D - D_1) + \beta_1 (C - C_1)\right],$$

mithin wegen (36)

$$c = \lambda^2 \left[4\beta^2 (D + D_1) + 2\beta\beta_1 (C + D + C_1 - D_1) + \beta_1{}^2 (C - C_1)\right]$$

Nun enthalten, wie aus (33) folgt, die Aggregate

$$D + D_1 \qquad C + D \qquad C_1 - D_1 \qquad C - C_1$$

kein r, es kann also auch λ^2 kein r enthalten. Damit ist die Richtigkeit der Bezeichnung in (35) bewiesen. Dass aber die Formeln in (34) und (35) alle von gleichem Werthe sind, folgt sofort nach dem Correspondenzsatz (I, 283. d.).

Für die oben angegebene Gleichung (16) findet man daher ach den gemachten Erörterungen, besonders nach (35) mit Benutzung von (28) bis (33) Beispiels halber auch noch folgende Formeln:

$$(37) \quad {}^{t}_{x^2 + xy + y^2} = \sqrt{\frac{2D + C}{2D_1 + C_1}} = \sqrt{\frac{3B - A}{3B_1 - A_1}} = \sqrt{\frac{7b - r}{8a - 5b + 3r}}$$

$$(38) \quad {}^{t}_{x^2 - xy + y^2} = \sqrt{\frac{2D - C}{2D_1 - C_1}} = \sqrt{\frac{3A - B}{3A_1 - B_1}} = \sqrt{\frac{8a - 3b - 3r}{b + r}}$$

$$t_{3x^2-2xy+3y^2} = \sqrt{\frac{3D-C}{3D_1-C_1}} = \sqrt{\frac{2A-B}{2A_1-B_1}}$$
$$= \sqrt{\frac{5a-b-2r}{a+r}}$$
$$t_{2x^2+3xy+2y^2} = \sqrt{\frac{4D+3C}{4D_1+3C_1}} = \sqrt{\frac{7B-A}{7B_1-A_1}}$$
$$= \sqrt{\frac{-4a+19b-r}{20a-13b+7r}}$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass diese Formeln für t, wenn man sie für die Gleichungen

$$x^2 + xy + y^2 = c$$
$$x^2 - xy + y^2 = c \text{ u. s. w.}$$

benutzt, ein λ liefern, welches kein r enthält.

Alles, was hier über die Herleitung der verschiedenen tt aus einander gesagt und für specielle Fälle ausgeführt ist, hat zur Voraussetzung, dass r in t_{x-y} und in t_{x+y}, wie in den Nennern von t_{xy} und $t_{x^2+y^2}$ gleiches Zeichen hat; entgegengesetzten Falls muss überall statt der Addition eine Subtraction und statt der Subtraction eine Addition eintreten.

Für die Formeln (28) bis (31), (37) und (38) ist noch zu bemerken, dass

t_{x-y} kein r im Nenner enthält,
t_{x+y} kein r im Zähler,
t_{xy} im Zähler $\pm r$, im Nenner ebenfalls $\pm r$,
$t_{x^2+y^2}$ im Zähler $\pm r$, im Nenner $\mp r$,
$t_{x^2+xy+y^2}$ im Zähler $\pm r$, im Nenner $\mp 3r$,
$t_{x^2-xy+y^2}$ im Nenner $\pm r$, im Zähler $\mp 3r$

u. s. w.

Dass statt r auch ein Vielfaches von r stehen kann, ist natürlich; doch das Verhältniss der Coefficienten und Zeichen von r für die Zähler und Nenner der verschiedenen hier angegebenen tt bleibt dasselbe.

f. Eine zweite Frage, die uns hier entgegentritt, ist die, wie man eine der angegebenen Formeln für t direct findet, wenn man gerade nur diese eine gebrauchen will; welchen Ausdruck von x und y muss man zu diesem Zwecke zunächst suchen?

Um $t_{\beta x^2 + \beta_1 xy + \beta y^2}$ direct zu erhalten, hat man zunächst zu suchen und als neue Unbekannte einzuführen

$$\frac{\alpha x^2 + \alpha_1 xy + \alpha y^2}{\beta x^2 + \beta_1 xy + \beta y^2} = u,$$

wo der Nenner gleich dem Index von t ist, der Zähler ein beliebiger homogener, symmetrischer Ausdruck des 2. Grades von x und y. Am einfachsten wird man daher zunächst

$$\frac{xy}{\beta x^2 + \beta_1 xy + \beta y^2} \text{ oder } \frac{x^2 + y^2}{\beta x^2 + \beta_1 xy + y^2}$$

suchen. — Der Kürze wegen mag dies für $t_{x^2 + xy + y^2}$ durchgeführt werden. Es wird sich dann direct die Formel (37) ergeben. Man hat also zu setzen

$$\frac{xy}{x^2 + xy + y^2} = u \tag{39}$$

Um dies zu substituiren, schreibt man die Gleichung (16) so:

$$\frac{(x^2 + xy + y^2 - xy)(x^2 + xy + y^2 - 2xy)}{(x^2 + xy + y^2)^2 - 2xy(x^2 + xy + y^2) - x^2y^2} = \frac{a}{b}$$

Mithin hat man für u

$$\frac{(1-u)(1-2u)}{1-2u-2u^2} = \frac{a}{b}$$

$$(a+2b)u^2 + (2a-3b)u = a-b$$

$$u = \frac{-2a+3b \pm \sqrt{(2a-3b)^2 + 4(a-b)(a+2b)}}{2(a+2b)} = \frac{-2a+3b \pm r}{2(a+2b)},$$

$$\text{d. h. } \frac{xy}{x^2+xy+y^2} = \frac{-2a+3b \pm r}{2(a+2b)}$$

Hieraus durch corr. Add.

$$t = \frac{x+y}{x-y} = \sqrt{\frac{7b \pm r}{8a - 5b \mp 3r}},$$

welches eben die oben auf anderem Wege abgeleitete Formel (37) ist.

g. Was nun die Auflösung der gegebenen Gleichungen 233. betrifft, deren Combination auf die den obigen Erörterungen zum Grunde gelegte Gleichung (16) führt, so wird man zur Darstellung der Unbekannten x und y wegen der 1. Gleichung am besten $t_{x^2+y^2}$ anwenden. Es ist nach (30)

$$t_{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{2a+b-r}{2a-b+r}},$$

also zu setzen

$$(40)\qquad \begin{aligned} x &= \lambda\,(\sqrt{2a+b-r}+\sqrt{2a-b+r})\\ y &= \lambda\,(\sqrt{2a+b-r}-\sqrt{2a-b+r}) \end{aligned}$$

Dies in der 1. Gleichung substituirt, giebt

$$\lambda\cdot 2\cdot 4a = a\cdot 2\sqrt{2a+b-r}$$

$$\lambda = \tfrac{1}{4}\sqrt{2a+b-r}$$

Daher aus (40)

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{4}\,(\sqrt{2a+b-r}+\sqrt{2a-b+r})\,\sqrt{2a+b-r}\\ y &= \tfrac{1}{4}\,(\sqrt{2a+b-r}-\sqrt{2a-b+r})\,\sqrt{2a+b-r} \end{aligned}$$

Zieht man $\sqrt{2a+b-r}$ aus der Klammer heraus, so erhält man die oben angegebene Form der Lösung.

Auf diese Weise kann man sich für t immer leicht die Formel aussuchen und bilden, welche der Form der gegebenen Gleichungen am angemessensten ist und welche daher die einfachsten Ausdrücke für x und y liefert.

Die folgenden Aufgaben bis 246. führen auf denselben Quotienten oder dieselbe Gleichung (16), höchstens stehen rechts andere Constante. Die tt müssen sonach dieselben bleiben oder sich doch leicht aus den hier gegebenen entwickeln lassen. Man wird daher nur die geeignete Formel für t zu wählen oder zu bilden haben, um das Resultat in der einfachsten Form hinschreiben zu können. — Es sollte damit nur gezeigt werden, wie viele Gleichungen sich an eine solche Gleichung, wie sie in (16) gegeben ist, knüpfen und aus derselben abgeleitet werden können, welche alle, so verschiedene Resultate sie auch sonst liefern, doch im Wesentlichen auf dieselbe Weise gelöst, ja deren Lösungen sogar aus einander abgeleitet werden können. Dass man die Zahl derselben leicht hätte vermehren können, liegt auf der Hand.

234. $\left[\begin{aligned} x^2+y^2 &= a\\ x^4+y^4 &= 2b\,(x^2-xy+y^2) \end{aligned}\right]$

L. $$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}\,(\sqrt{a+b-r}+\sqrt{a-b+r})\\ y &= \tfrac{1}{2}\,(\sqrt{a+b-r}-\sqrt{a-b+r})\\ r &= \sqrt{2a^2-4ab+b^2} \end{aligned}$$

Die Division der Gleichungen in einander liefert die Gleichung (16) in 233., nur ist dort $2b$ statt b zu setzen. Wegen der

1. Gleichung wird man $t_{x^2+y^2}$, d. h. (30) zu benutzen haben, um für x und y die einfachsten Formeln zu erhalten, also

$$t = \sqrt{\frac{a+b-r}{a-b+r}},\quad r = \sqrt{2a^2-4ab+b^2}$$

Dass sonst die Lösung der Aufgabe am einfachsten nach 120. zu beschaffen ist, übersieht man sofort. Hier sollte nur gezeigt werden, dass man das Resultat immer sofort in seiner einfachsten Form hinschreiben kann, wenn man einmal die Formeln für t aus einer Gleichung des 4. Grades 233. (16) entwickelt hat, auf welche die Combination der gegebenen Gleichungen führt, und die richtige Formel für t auswählt.

235. $\left[\begin{array}{c} x^3+y^3 = a\,(x+y) \\ x^4+y^4 = 2b\,(x^2+y^2) \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4a-3b-3r}+\sqrt{b+r}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4a-3b-3r}-\sqrt{b+r}\right) \end{array}\right\}$ r wie in 234.

Dazu kommt noch

$$x = 0,\ \sqrt{b} \qquad y = 0,\ -\sqrt{b}$$

Die 1. Gleichung lässt sich zerlegen in

$$1.\ x+y=0 \qquad 2.\ x^2-xy+y^2 = a$$

Die Division der Gleichungen in einander führt auf den Quotienten 233. (16), nur ist dort $2b$ statt b zu setzen. Wegen $x^2-xy+y^2 = a$ hat man $t_{x^2-xy+y^2}$ zu benutzen. — Ohne Benutzung von 233. hat man die Gleichungen 1. und 2. einzeln mit der 2. Gleichung zu combiniren, also diesen entsprechend zunächst $x-y$ für 1. und für 2. x^2+y^2 und xy zu suchen.

236. $\left[\begin{array}{c} (x^2+y^2)\,(x^2-xy+y^2) = a \\ x^4+y^4 = b \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{2a+b-r}+\sqrt{2a-b+r}}{2\sqrt[4]{4a-b+r}} \\ y = \dfrac{\sqrt{2a+b-r}-\sqrt{2a-b+r}}{2\sqrt[4]{4a-b+r}} \end{array}\right\}$ $r = \sqrt{8a^2-8ab+b^2}$

Auch diese Gleichungen liefern combinirt den Quotienten in 233. (16). — Hier ist für die Darstellung der Unbekannten $t_{x^2+y^2}$ benutzt. Man hätte ebenso gut $t_{x^2-xy+y^2}$ wählen

können. Die Formeln für x und y wären nicht complicirter geworden. Man hätte erhalten

$$x = \frac{\sqrt{8a - 3b - 3r} + \sqrt{b + r}}{2\sqrt{2\,(4a - b - r)}} \text{ u. s. w.}$$

Man kann die Unbekannten auch noch in folgender Form darstellen:

$$(1)\quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[4]{\frac{20a - 11b - 7r}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4a - 3b + r}{2}}\right) \\ y &= \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[4]{\frac{20a - 11b - 7r}{2}} - \sqrt[4]{\frac{4a - 3b + r}{2}}\right) \end{aligned}$$

Um diese Formeln zu erhalten, muss man auch für t noch eine andere Formel anwenden als die in 233. entwickelten. Dort erschien t überall als eine Quadratwurzel. Es lässt sich t aber auch als eine Wurzel des 4. Grades darstellen, deren Radicand nicht complicirter ist als bei den Quadratwurzeln.

Man erhält diese Formel für t am einfachsten dadurch, dass man die Formeln für t, welche quadratischen Factoren des Zählers oder Nenners von dem Quotienten der linken Seite der Gleichung 233. (7), in den obigen Beispielen 233. (16), auf welche die Combination der gegebenen Gleichungen führt, mit einander multiplicirt und aus dem Product die Quadratwurzel zieht.

Hier ist also t zu bestimmen aus

$$(2)\qquad \frac{(x^2 + y^2)\,(x^2 - xy + y^2)}{x^4 + y^4} = \frac{a}{b},\ \text{s. 233. (16)}$$

Die quadratischen Factoren des Zählers links sind

$$x^2 + y^2 \text{ und } x^2 - xy + y^2$$

Nach 233. (30) und 233. (38) ist aus (2)

$$(3)\quad t_{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{2a + b - r}{2a - b + r}},\quad t_{x^2 - xy + y^2} = \sqrt{\frac{8a - 3b - 3r}{b + r}}$$

$$(4)\qquad \text{für } r = \sqrt{8a^2 - 8ab + b^2}$$

Aus der Multiplication dieser Formeln für t ergiebt sich die gesuchte Formel für t, welche der Kürze halber mit t_4 bezeichnet werden soll,

$$(5)\qquad t_4 = \sqrt[4]{\frac{(2a + b - r)\,(8a - 3b - 3r)}{(2a - b + r)\,(b + r)}}$$

Wegen (4) ist nämlich

$$(6)\quad (2a + b - r)\,(8a - 3b - 3r) = 2a\,(20a - 11b - 7r)$$

$$(7)\qquad (2a - b + r)\,(b + r) = 2a\,(4a - 3b + r)$$

Daher wird

$$(8) \qquad t_4 = \sqrt[4]{\frac{20a - 11b - 7r}{4a - 3b + r}}$$

Andere Formeln für t in dieser Gestalt, als Wurzel des 4. Grades mit einem so einfachen Radicanden, giebt es nicht. — Bei dieser Formel für t ist zu bemerken, dass das Product aus dem Zähler und Nenner des Radicanden stets ein vollständiges Quadrat sein muss, hier

$$(9) \quad (20a - 11b - 7r)(4a - 3b + r) = (-4a + 5b + r)^2$$

Da nach (3)

$$\frac{2a + b - r}{2a - b + r} = \frac{8a - 3b - 3r}{b + r}$$

ist, so folgt aus der Multiplication von (6) und (7)

$$(20a - 11b - 7r)(4a - 3b + r) = \left[\frac{(2a + b - r)(b + r)}{2a}\right]^2$$
$$= (-4a + 5b + r)^2$$

Will man daher mit Hülfe der Formel (8) die Unbekannten x und y entwickeln, so hat man in der 1. gegebenen Gleichung zu setzen

$$(10) \quad \begin{aligned} x &= \lambda\left(\sqrt[4]{10a - 11b - 7r} + \sqrt[4]{4a - 3b + r}\right) \\ y &= \lambda\left(\sqrt[4]{10a - 11b - 7r} - \sqrt[4]{4a - 3b + r}\right) \end{aligned}$$

und mit Zuziehung von (9) das λ zu bestimmen. Man erhält

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$$

Dann ergeben sich aus (10) die oben in (1) für x und y angegebenen Formeln. — Man würde dieselben direct erhalten, wenn man

$$\left[\begin{aligned} x &= \sqrt[4]{u} + \sqrt[4]{v} \\ y &= \sqrt[4]{u} - \sqrt[4]{v} \end{aligned}\right]$$

setzte und zunächst u und v bestimmte. Der oben angegebene Weg ist der kürzere, wenn die Formeln für die tt schon gefunden oder anderweitig bestimmt sind. Es sollte überhaupt nur gezeigt werden, dass man auf dem in 233. b. ff. angegebenen Wege leicht zu allen möglichen Formeln für x und y gelangen kann. Für die Berechnung sind die zuerst angegebenen Formeln der Lösung die einfachsten, insonderheit wenn auch die imaginären Wurzeln mit gefunden werden sollen. Für die Darstellung

der Unbekannten durch die Wurzeln des 4. Grades ist zu beachten, dass stets sein muss

$$(11)\quad \sqrt{(20a - 11b - 7r)\,(4a - 3b + r)} = -4a + 5b + r$$

Es dürfen also die beiden Wurzeln des 4. Grades nicht alle sonst für Wurzeln des 4. Grades zulässigen Zeichen und Deutungen erhalten. Man würde sonst aus der Combination aller 4 Werthe der einen Wurzel mit den 4 Werthen der andern Wurzel im Ganzen 16 Werthe für x und y erhalten, und wegen der Doppeldeutigkeit von r sogar 32. Von diesen ist jedoch wegen der Bedingung (11) nur die Hälfte zulässig. Es giebt nur 16 Wurzelpaare. Durch Elimination von y erhält man für x eine Gleichung des 16. Grades, nämlich

$$4x^{16} - 8bx^{12} + (12a^2 - 16ab + 9b^2)\,x^8$$
$$-(12a^2 - 16ab + 5b^2)\,bx^4 + (a - b)^4 = 0$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergiebt sich leicht nach I, 365. Man hat

$$4(x^8 - bx^4)^2 + (12a^2 - 16ab + 5b^2)(x^8 - bx^4)$$
$$+ (a - b)^4 = 0$$

Setzt man daher der Kürze halber

$$-(12a^2 - 16ab + 5b^2) + (4a - 3b)\,r = 2R,$$

so ergiebt sich

$$x = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 + R}} \qquad y = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 + R}}$$

Man erhält diese Formeln direct, wenn man wegen der 2. Gleichung

$$x^4 + y^4 = b$$

setzt

$$x^4 - y^4 = z$$

und zunächst z bestimmt, so dass man hat

$$x = \sqrt[4]{\frac{b + z}{2}} \qquad y = \sqrt[4]{\frac{b - z}{2}}$$

237. $\begin{bmatrix} (x^2 + y^2)\,(x^3 + y^3) = a \\ (x + y)\,(x^4 + y^4) = b \end{bmatrix}$

L. $$x = \frac{\sqrt{2a + b - r} + \sqrt{2a - b + r}}{2\sqrt[10]{(4a - b + r)^2\,(2a + b - r)}},$$

$$y = \frac{\sqrt{2a + b - r} - \sqrt{2a - b + r}}{2\sqrt[10]{(4a - b + r)^2\,(2a + b - r)}}$$

für $r = \sqrt{8a^2 - 8ab + b^2}$

Auch in dieser Aufgabe hat t denselben Werth wie in 233. Man benutzt am besten $t_{x^2+y^2}$. Mit Benutzung von t_4 in 236. (8) erhält man

$$x = \frac{\sqrt[4]{20a-11b-7r} + \sqrt[4]{4a-3b+r}}{2\sqrt[20]{16\,(20a-11b-7r)}} \text{ u. s. w.}$$

Im Ganzen liefert die Aufgabe 20 Paare von Wurzeln. Die Elimination der einen Unbekannten muss für die andere eine Gleichung des 20. Grades ergeben.

238. $\left[\begin{array}{l} x^3+y^3=a \\ x^4+y^4=2b\,\dfrac{x^2+y^2}{x+y} \end{array}\right]$

L. $x = \dfrac{\sqrt{4a-3b-3r}+\sqrt{b+r}}{2\sqrt[6]{4a-3b-3r}}$, $y = \dfrac{\sqrt{4a-3b-3r}-\sqrt{b+r}}{2\sqrt[6]{4a-3b-3r}}$

für $r = \sqrt{2a^2-4ab+b^2}$

Hier ist $t_{x^2-xy+y^2}$ benutzt. — Die Formeln für t in 233. gelten auch hier, nur ist dort $2b$ statt b zu setzen.

239. $\left[\begin{array}{c} (x^2+y^2)\,(x^2-xy+y^2)=axy \\ x^4+y^4=bxy \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3a-2b-r}+\sqrt{b-a}\right) \\ y=\frac{1}{2}\sqrt{3a-2b-r}-\sqrt{b-a} \end{array}\right\} r=\sqrt{8a^2-8ab+b^2}$

Um zu wissen, welche Formel für t hier die geeignetste ist, combinire man die Gleichungen nach 114. so, dass die linke Seite durch xy theilbar wird, hier einfach durch Subtraction. Man erhält $(x-y)^2 = b-a$, hat also diese Gleichung mit einer der gegebenen zu combiniren oder t_{x-y} anzuwenden.

240. $\left[\begin{array}{c} (x^2+y^2)\,(x^3+y^3)=axy \\ (x+y)\,(x^4+y^4)=bxy \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{3a-2b-r}+\sqrt{b-a}}{2\sqrt[6]{3a-2b-r}} \\ y=\dfrac{\sqrt{3a-2b-r}-\sqrt{b-a}}{2\sqrt[6]{3a-2b-r}} \end{array}\right\} r=\sqrt{8a^2-8ab+b^2}$

241. $\left[\begin{array}{c} (x^2+y^2)\,(x^2-xy+y^2)=a\,(x-y)^2 \\ x^4+y^4=2b\,(x-y)^2 \end{array}\right]$

L. $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{-2a+5b+r}+\sqrt{2a-3b+r}\right)$

$y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{-2a+5b+r}-\sqrt{2a-3b+r}\right)$

$r=\sqrt{2a^2-4ab+b^2}$

Durch Subtraction erhält man $xy = 2b - a$. Dies ist zu combiniren mit einer der beiden Gleichungen und zunächst $x^2 + y^3$ zu suchen, oder es ist t_{xy} zu benutzen.

242. $\left[\begin{array}{c}(x^2 + y^2)(x^2 - xy + y^2) = a(x + y)^2 \\ x^4 + y^4 = 2b(x + y)^2\end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{10a - 11b - \sqrt{7r}} + \sqrt{-2a + 5b + r}\right)$

$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{10a - 11b - \sqrt{7r}} - \sqrt{-2a + 5b + r}\right)$

r wie in 241.

Combinirt man nach 114. die Gleichungen so, dass auch die linke Seite durch $(x + y)^2$ theilbar wird, so erhält man

$$2x^2 - 3xy + 2y^2 = 6b - a$$

Es ist also das entsprechende t zu benutzen, oder man muss zunächst $x^2 + y^2$ und xy bestimmen.

243. $\left[\begin{array}{l}\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 2a^2 - ab \\ \frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3} = 2a^2 - b^2\end{array}\right]$

L. 1. $x = \frac{a}{2}\left(4a - 3b + \sqrt{4ab - 3b^2}\right)$

$y = \frac{a}{2}\left(4a - 3b - \sqrt{4ab - 3b^2}\right)$

2. $x = \frac{2a - b}{2}\left(a + b + \sqrt{a^2 - b^2}\right)$

$y = \frac{2a - b}{2}\left(a + b - \sqrt{a^2 - b^2}\right)$

Für diese Annahme der Bekannten wird r rational; es ist daher einerlei, welche Formel für t man wählt, man erhält immer

$$t_1 = \sqrt{\frac{4a - 3b}{b}},\quad t_2 = \sqrt{\frac{a + b}{a - b}}$$

244. $\left[\begin{array}{l}x^3 + y^3 = (2a^2 - ab)(x + y) \\ x^4 + y^4 = (2a^2 - b^2)(x^2 + y^2)\end{array}\right]$

L. 1. $x = 0, \pm\sqrt{2a^2 - b^2}$

$y = 0, \mp\sqrt{2a^2 - b^2}$

2. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4a - 3b} + \sqrt{b}\right)\sqrt{2a - b},\ \left(\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b}\right)\sqrt{\frac{a}{2}}$

$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4a - 3b} - \sqrt{b}\right)\sqrt{2a - b},\ \left(\sqrt{a + b} - \sqrt{a - b}\right)\sqrt{\frac{a}{2}}$

245. $\left[\begin{array}{l}(x^2+y^2)(x^3+y^3)=2a^2-ab\\(x+y)(x^4+y^4)=2a^2-b^2\end{array}\right]$

L. $x=\dfrac{\sqrt{4a-3b}+\sqrt{b}}{2\sqrt[10]{4a-3b}}, \dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{2\sqrt[10]{\frac{1}{4}(a+b)}}$

$y=\dfrac{\sqrt{4a-3b}-\sqrt{b}}{2\sqrt[10]{4a-3b}}, \dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{2\sqrt[10]{\frac{1}{4}(a+b)}}$

246. $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+y^2}{x+y}=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}\\\dfrac{x^4+y^4}{x^3+y^3}=\dfrac{a^4+b^4}{a^3+b^3}\end{array}\right]$

L. 1. $x=a, b$

$y=b, a$

2. $x=\frac{1}{2}\dfrac{a^2+b^2}{a^3+b^3}\left(1+\sqrt{\dfrac{ab}{2a^2-3ab+2b^2}}\right)(2a^2-3ab+2b^2)$

$y=\frac{1}{2}\dfrac{a^2+b^2}{a^3+b^3}\left(1-\sqrt{\dfrac{ab}{2a^2-3ab+2b^2}}\right)(2a^2-3ab+2b^2)$

Man findet zunächst

$$t=\pm\frac{a+b}{a-b}, \sqrt{\frac{2a^2-3ab+2b^2}{ab}}$$

Man kann sich die Auflösung dadurch erleichtern, dass man für a^2+b^2 und ab besondere Grössen, etwa A und B setzt (s. 129). Dann wird

$$r=A^2-4AB+2B^2$$

$$t=\sqrt{\frac{A+2B}{A-2B}}, \sqrt{\frac{2A-3B}{B}}$$

Bei den folgenden Aufgaben hat man zunächst aus der Combination der gegebenen Gleichungen immer eine Gleichung zu suchen von der Form 233. (7). Aus dieser ist dann t zu bestimmen, d. h. $\frac{x+y}{x-y}$ und somit auch $\frac{x}{y}$. Dann hat die Auflösung weiter keine Schwierigkeit. Welche Formel für t jedesmal anzuwenden ist, um für x und y möglichst einfache Ausdrücke zu erhalten, hängt von der Art der gegebenen Gleichungen ab.

247. $xy(x+y)^2=a$

$x^3y^3(x^2+y^2)=b$

L. $x=\dfrac{a+\sqrt{ar}}{\sqrt[4]{4a^2(a-r)}}, \; y=\dfrac{a-\sqrt{ar}}{\sqrt[4]{4a^2(a-r)}}$, für $r=\sqrt{a^2-8b}$

Durch Division der 2. Gleichung in das Quadrat der 1. Gleichung kommt

$$\frac{(x+y)^4}{xy\,(x^2+y^2)} = \frac{a^2}{b}$$

Hieraus ergiebt sich als einfachste Formel

$$t = \sqrt{\frac{a}{r}}$$

248. $\left[\begin{array}{c} x^2 - y^2 = \dfrac{a}{(x+y)^4} \\ x^4 - y^4 = \dfrac{b}{xy} \end{array}\right]$

L. $x = \dfrac{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{a-8b}}{2\sqrt[24]{a\,(a-8b)}}$, $y = \dfrac{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{a-8b}}{2\sqrt[24]{a\,(a-8b)}}$

249. $\left[\begin{array}{c} x^2 + y^2 = \dfrac{b}{xy} \\ x + y = a \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt[4]{a^4 - 8b}\right)$, $y = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt[4]{a^4 - 8b}\right)$

Diese Aufgabe ist am leichtesten nach 142. zu lösen; man kommt aber auch nach 233. leicht zum Ziele.

250. $\left[\begin{array}{c} (x+y)^3 = a\,(x-y) \\ x^2y - xy^2 = b\,(x+y) \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a} + \sqrt{a-r}\right)\sqrt[4]{\dfrac{a-r}{8a}}$

$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a} - \sqrt{a-r}\right)\sqrt[4]{\dfrac{a-r}{8a}}$ $\Bigg\}\; r = \sqrt{a^2 - 16ab}$

Durch Division der gegebenen Gleichungen in einander erhält man

(1) $$\frac{(x+y)^4}{xy\,(x-y)^2} = \frac{a}{b}$$

Hieraus findet man als einfachste Formel für t

$$t = \sqrt{\frac{2a}{a-r}}.$$

Diese ist zu benutzen.

Hier lässt sich t durch a und r allein darstellen. Dies a ist ein Factor von r^2. Lässt sich r^2 in zwei rationale Factoren zerlegen, so lässt sich t immer durch r und den einen dieser Factoren, ohne den andern, darstellen (vgl. I, 406. c.). Diese Darstellung wird jedoch nur dann besonders einfach, wenn a oder b ein Factor von r^2 ist. Dies ist der Fall, wenn in der homogenen symmetrischen Gleichung des 4. Grades [233. (7)],

aus der man t zu entwickeln hat, der Zähler oder Nenner links ein Quadrat ist. Hier ist in (1) der Zähler links ein Quadrat $(x + y)^4$. Diesem Zähler links entspricht rechts a. Daher muss r^2 den Factor a enthalten. Wäre der Nenner links ein Quadrat, so müsste r^2 den Factor b enthalten. — Der andere Factor von r^2 ist im vorliegenden Falle $a - 16b$. Man muss daher schliessen, dass in (1) der entsprechende Ausdruck links ebenfalls ein Quadrat ist. Man hat wirklich

$$(x + y)^4 - 16xy(x - y)^2 = (x^2 - 6xy + y^2)^2$$

Daraus kann man weiter noch auf folgende Sätze schliessen, wenn man allgemein setzt:

$$(2)\quad \begin{matrix} mx^4 + nx^3y + px^2y^2 + nxy^3 + my^4 = A \\ m_1x^4 + n_1x^3y + p_1x^2y^2 + n_1xy^3 + m_1y^4 = B \end{matrix}$$

1. Ist A ein Quadrat, so giebt es stets zwei rationale Factoren α und β, aber auch nur zwei solche, durch welche $\alpha A + \beta B$ ebenfalls ein Quadrat wird.

2. Ist weder A noch B ein Quadrat, und sind α und β zwei rationale Zahlen, dass $\alpha A + \beta B$ ein Quadrat wird, so muss es stets noch zwei andere rationale Zahlen α_1 und β_1 geben, dass $\alpha_1 A + \beta_1 B$ ebenfalls ein Quadrat wird.

3. Ob die Herstellung solcher Quadrate aus A und B vermittelst rationaler Factoren möglich ist, ersieht man, wenn man t entwickelt aus

$$(3)\quad \frac{A}{B} = \frac{a}{b}.$$

Ist dann

$$r^2 = (\alpha a + \beta b)(\alpha_1 a + \beta_1 b),$$

so muss auch

$$\alpha A + \beta B \text{ sowohl, als } \alpha_1 A + \beta_1 B$$

ein Quadrat sein. Diese Darstellung von Quadraten wird also nur auf eine rationale, irrationale oder imaginäre Weise möglich sein, jenachdem die Factoren von r^2 rational, irrational oder imaginär sind, jedesmal aber immer auf eine doppelte Weise, da r^2 immer zwei Factoren enthält (vgl. I, 406. c.).

Wie man direct zu den Ausdrücken gelangt, welche nur r und den einen Factor von r^2 enthalten, ersieht man leicht aus I, 406. d. Ist demnach in einer Gleichung (3) die Grösse A ein vollständiges Quadrat, also z. B.

$$A = (\alpha x^2 + \alpha_1 xy + \alpha y^2)^2,$$

so muss man

$$\frac{\beta x^2 + \beta_1 xy + \beta y^2}{\alpha x^2 + \alpha_1 xy + \alpha y^2} = u$$

zunächst suchen und daraus t; dann erhält man für t eine Formel, in welcher nur r und a vorkommt. Die Factoren β und β_1 sind gleichgültig; sie fallen wieder heraus. Am einfachsten setzt man also

$$(4) \qquad \frac{xy}{\alpha x^2 + \alpha_1 xy + \alpha y^2} = u$$

(s. 233. f.) und bestimmt dies u zunächst aus der Gleichung (3) und mit Hülfe von u aus (4) t. — Für die obige Gleichung (1) hat man also zu setzen

$$\frac{xy}{(x+y)^2} = u$$

Das giebt für u

$$\frac{1}{u(1-4u)} = \frac{a}{b}$$

$$u = \frac{a+r}{8a}, \text{ d. h.}$$

$$\frac{xy}{(x+y)^2} = \frac{a+r}{8a}, \text{ also}$$

$$t = \frac{x+y}{x-y} = \sqrt{\frac{2a}{a-r}} \text{ u. s. w.}$$

251. $\left[\begin{array}{c}(x+y)^4 = a\,(x^2+y^2)\\ xy\,(x-y)^2 = b\,(x^2+y^2)\end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3a-r} + \sqrt{2a-8b-2r}\right)\\ y = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3a-r} - \sqrt{2a-8b-2r}\right)\end{array}\right\} r = \sqrt{a^2 - 16ab}$

Dazu kommt noch $x = y = 0$. — Nach 114. erhält man hier zunächst

$$x^2 + 6xy + y^2 = a + 2b$$

Man hat also entweder das diesem Ausdrucke entsprechende t zu suchen und zu benutzen, oder man combinire diese Gleichung mit der 2. gegebenen Gleichung und bestimme zunächst xy und $x^2 + y^2$.

252. $\left[\begin{array}{c}(x+y)^2\,(x^2+y^2) = a\\ (x^2+y^2)^2\,(x^4+y^4) = b\end{array}\right]$

L. $x = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{2r-3a}}{2\sqrt[4]{r-a}}$, $y = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{2r-3a}}{2\sqrt[4]{r-a}}$,

für $r = \sqrt{2a^2 + 2b}$

253. $\left[\begin{matrix}(x+y)^4 = 2axy \\ x^4+y^4 = 2bxy\end{matrix}\right]$

L. $\left.\begin{matrix}x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a-r}+\sqrt{7r-10a-4b}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a-r}-\sqrt{7r-10a-4b}\right)\end{matrix}\right\} r = \sqrt{2a(a+b)}$

Man findet hier zunächst $2x^2+3xy+2y^2 = a-b$

254. $\left[\begin{matrix}x^2-y^2 = a \\ (x-y)^5(x^5+y^5) = b\end{matrix}\right]$

L. $\left.\begin{matrix}x = \dfrac{a+\sqrt{2r-a^2}}{2\sqrt[4]{2r-a^2}} \\ y = \dfrac{a-\sqrt{2r-a^2}}{2\sqrt[4]{2r-a^2}}\end{matrix}\right\} r = \sqrt{\dfrac{a^5+4b}{5a}}$

255. $\left[\begin{matrix}(x+y)^5 = 10a(x^3+y^3) \\ x^5+y^5 = 10b(x^3+y^3)\end{matrix}\right]$

L. $\left.\begin{matrix}x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3r-5a}+\sqrt{11a+24b-5r}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3r-5a}-\sqrt{11a+24b-5r}\right)\end{matrix}\right\} r = \sqrt{5a(a+4b)}$

Nach 114. findet man hier zunächst

(1) $\qquad 2x^2+xy+2y^2 = 2(a+9b)$

Man hebt also entweder eine der gegebenen Gleichungen durch $x+y$ und sucht aus dieser und (1) zunächst xy und x^2+y^2 oder man sucht das der Gleichung (1) entsprechende t. Man findet

$$t = \sqrt{\frac{2r+5a}{16b-a}} = \sqrt{\frac{5a}{2r-5a}} = \sqrt{\frac{3r-5a}{11a+24b-5r}}$$

Die letzte Formel ist nach 233. (35) gefunden und ist die gesuchte. Dann ergeben sich aus (1) die Unbekannten in der angegebenen Form.

256. $\left[\begin{matrix}(x-y)(x^2-y^2)(x^4-y^4) = axy \\ (x+y)(x^2+y^2)(x^3+y^3) = b(x-y)\end{matrix}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2r-1}+1\right)R, \quad y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2r-1}-1\right)R,$

$$R = \sqrt[5]{\frac{a(r-1)}{2r(2r-1)}}, \quad r = \sqrt{1+\frac{4b}{a}}$$

257. $\left[\begin{matrix}(x-y)(x^2-y^2)(x^3-y^3)(x^4-y^4) = a \\ (x+y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2) = b\end{matrix}\right]$

L. $x = \dfrac{\sqrt{r-2a}+\sqrt{3a}}{2\sqrt[10]{81a^2b^2(r-2a)}}, \quad y = \dfrac{\sqrt{r-2a}-\sqrt{3a}}{2\sqrt[10]{81a^2b^2(r-2a)}}$

$$r = \sqrt{a^2+24ab^2}$$

258. $\left[\begin{matrix}(x-y)\,(x^2-y^2)=a\\(x+y)\,(x^2+y^2)\,(x^3+y^3)=b\end{matrix}\right]$

L. $x=\dfrac{\sqrt{r-2a}+\sqrt{a}}{2\sqrt[6]{r-2a}}$, $y=\dfrac{\sqrt{r-2a}-\sqrt{a}}{2\sqrt[6]{r-2a}}$

$r=\sqrt{a^2+8b}$

259. $\left[\begin{matrix}(x-y)\;(x^2-y^2)=a\\(x+y)^2\,(x^4+y^4)=b\end{matrix}\right]$

L. $x=\dfrac{\sqrt{2r-3a}+\sqrt{a}}{2\sqrt[6]{2r-3a}}$, $y=\dfrac{\sqrt{2r-3a}-\sqrt{a}}{2\sqrt[6]{2r-3a}}$

$r=\sqrt{2a^2+2b}$

260. $\left[\begin{matrix}x\,(y-1)=a\\x^4\,(y^4+1)=b\end{matrix}\right]$

L. $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2r-3a^2}-a\right)$, $y=\dfrac{\sqrt{2r-3a^2}+a}{\sqrt{2r-3a^2}-a}$,

$r=\sqrt{2a^4+2b}$

Man eliminire x, so erhält man für y eine Gleichung, wie sie behandelt sind in I, 394. ff. Es ist demnach

$$\frac{y+1}{y-1}=t \text{ oder } \frac{y^2+1}{y}=u$$

zunächst zu bestimmen. — Diese Aufgabe ist übrigens nicht wesentlich von 188. verschieden. Wenn man dort $xy^2=u$ und $\frac{x}{y}=v$ setzt, so nehmen jene Gleichungen diese Form an, abgesehen vom negativen Zeichen in der 1. Gleichung, was für die Auflösung nicht in Betracht kommt. Oder man setzt hier $\frac{u}{v}$ statt y und uv statt $\frac{x}{v}$.

261. $\left[\begin{matrix}x=a\,(y-1)\\x^4=b\,(y^4+1)\end{matrix}\right]$

L. $x=\dfrac{2a}{\sqrt{2r-3}-1}$, $y=\dfrac{\sqrt{2r-3}+1}{\sqrt{2r-3}-1}$, $r=\sqrt{\dfrac{2a^4}{b}+2}$

262. $\left[\begin{matrix}(x-y)^2\,(x^2-y^2)\,(x^4-y^4)=a\\(x+y)^2\,(x^2+y^2)\,(x^4+y^4)=b\end{matrix}\right]$

L. $x=\dfrac{\sqrt{2r-3a}+\sqrt{a}}{2\sqrt[8]{a\,(r-a)\,(2r-3a)}}$, $y=\dfrac{\sqrt{2r-3a}-\sqrt{a}}{2\sqrt[8]{a\,(r-a)\,(2r-3a)}}$,

$r=\sqrt{2a\,(a+b)}$

Die Gleichungen haben 32 Wurzelpaare. Die Elimination der einen Unbekannten liefert für die andere eine Gleichung vom 32. Grade.

263. $\left[\begin{matrix} xy\,(x^2+y^2)=a \\ x^2-y^2=b \end{matrix}\right]$

L. $\left.\begin{matrix} x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{r+4a}+\sqrt[4]{r-4a}\right) \\ y=\frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{r+4a}-\sqrt[4]{r-4a}\right) \end{matrix}\right\} r=\sqrt{16a^2+b^4}$

264. $\left[\begin{matrix} (x^2+y^2)\,(x^3-y^3)=a \\ (x-y)\,(x^2-y^2)\,(x^3-y^3)\,(x^4-y^4)=b \end{matrix}\right]$

L. $\left.\begin{matrix} x=-\dfrac{\sqrt{4a^2-2b+r}+\sqrt{3b}}{2\sqrt[5]{3a\,(4a^2-2b+r)\sqrt{3b}}} \\ y=\dfrac{\sqrt{4a^2-2b+r}-\sqrt{3b}}{2\sqrt[5]{3a\,(4a^2-2b+r)\sqrt{3b}}} \end{matrix}\right\} r=\sqrt{16a^4-16a^2b+b^2}$

265. $\left[\begin{matrix} \dfrac{x^2-xy+y^2}{x+y}=a \\ \dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}=\dfrac{(x-y)^2}{b} \end{matrix}\right]$

L. $x=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{4a-b}+2\sqrt{a-b}+\sqrt{3b}}{\sqrt{4a-b}-\sqrt{a-b}}$

$$y=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{4a-b}+2\sqrt{a-b}-\sqrt{3b}}{\sqrt{4a-b}-\sqrt{a-b}}$$

Um gerade diese Formeln für die Unbekannten zu erhalten, muss man für t die geeigneten Ausdrücke suchen. Aus der Multiplication der Gleichungen ergiebt sich

$$\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x^2-y^2)^2}=\frac{a}{b}.$$

Daraus erhält man

$$t=\sqrt{\frac{4a-b+2r}{4a-b-2r}}=\sqrt{\frac{r+2\,(a-b)}{r-2\,(a-b)}}$$

$$\text{für } r=\sqrt{(a-b)\,(4a-b)}$$

Es sind dies $t_{x^2+y^2}$ und t_{xy}. Setzt man in einer dieser Formeln für r seinen Werth und hebt, so giebt das

$$t^2=\frac{\sqrt{4a-b}+2\sqrt{a-b}}{\sqrt{4a-b}-2\sqrt{a-b}}$$

Schafft man hier die Wurzeln aus dem Nenner fort und radicirt, so hat man schliesslich

$$t=\frac{\sqrt{4a-b}+2\sqrt{a-b}}{\sqrt{3b}}$$

Est ist demnach zu setzen

$$(1)\qquad \left[\begin{array}{c} x+y=\lambda\left(\sqrt{4a-b}+2\sqrt{a-b}\right) \\ x-y=\lambda\sqrt{3b} \end{array}\right]$$

Quadrirt man, so folgt durch Addition und Subtraction

$$(2)\qquad \left[\begin{array}{c} x^2+y^2=\lambda^2\sqrt{4a-b}\left(\sqrt{4a-b}+2\sqrt{a-b}\right) \\ xy=\lambda^2\sqrt{a-b}\left(\sqrt{4a-b}+2\sqrt{a-b}\right) \end{array}\right]$$

Setzt man die Ausdrücke aus (1) und (2) in die erste der gegebenen Gleichungen, so erhält man

$$\lambda=\frac{a}{\sqrt{4a-b}-\sqrt{a-b}}$$

und somit aus den Gleichungen (1) die oben für x und y angegebenen Ausdrücke.

266. $\left[\begin{array}{c} x^2+xy+y^2=a\,(x-y) \\ (x+y)\,(x^2-y^2)=b\,(x^2-xy+y^2) \end{array}\right]$

L. $x=\frac{a}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3b}+\sqrt{4a-b}-2\sqrt{a-b}}{\sqrt{4a-b}+\sqrt{a-b}}$

$y=\frac{a}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3b}-\sqrt{4a-b}+2\sqrt{a-b}}{\sqrt{4a-b}+\sqrt{a-b}}$

267. $\left[\begin{array}{c} x^2+y^2=a\,(x+y) \\ \dfrac{x^4+y^4}{x^4-y^4}=\dfrac{x-y}{b} \end{array}\right]$

L. $x=\frac{a}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2a-b}+\sqrt{2a-2b}+\sqrt{b}}{\sqrt{2a-b}}$

$y=\frac{a}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2a-b}+\sqrt{2a-2b}-\sqrt{b}}{\sqrt{2a-b}}$

268. $\left[\begin{array}{c} (x+y)^2\,(x^2+y^2)=a\,(x^2+xy+y^2) \\ x^2y^2=b\,(x^2+xy+y^2) \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a+b+r}+\sqrt{a+b-3r}\right) \\ y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a+b+r}-\sqrt{a+b-3r}\right) \end{array}\right\} r=\sqrt{(a+b)\,b}$

Die Addition der Gleichungen liefert zunächst

$$x^2+xy+y^2=a+b$$

269. $\left[\begin{array}{c} (x+y)^2\,(x^2+y^2)=a\,(x^2-xy+y^2) \\ x^2y^2=b\,(x^2-xy+y^2) \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a-b-r}+\sqrt{a+7b-5r}\right) \\ y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a-b-r}-\sqrt{a+7b-5r}\right) \end{array}\right\}$ r wie in 268.

Man findet zunächst $x^2+3xy+y^2=a-3b$

270. $\left[\begin{array}{l} x^2y - xy^2 = \frac{1}{a}(x^4 + y^4) \\ x^2y + xy^2 = b\,(x^2 - y^2) \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(a-2b)\,b} + \sqrt{(a+2b)\,b} - 2b\right)$
$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(a-2b)\,b} - \sqrt{(a+2b)\,b} + 2b\right)$

271. $\left[\begin{array}{c} x^5 + y^5 = a\,(x^3 + y^3) \\ x^2y^2\,(x+y) = b\,(x^3 + y^3) \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a+r} + \sqrt{a+2b-r}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a+r} - \sqrt{a+2b-r}\right) \end{array}\right\} r = \sqrt{4ab+5b^2}$

Man findet zunächst $x^2 + y^2 = a + b$

272. $\left[\begin{array}{c} (x-y)\,(x^2-y^2)\,(x^3-y^3) = axy \\ x^4 - y^4 = b \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{-a+b+r} + \sqrt{a+3b-r}}{2\sqrt[8]{4(-a+b+r)(a+3b-r)}} \\ y = \dfrac{\sqrt{-a+b+r} - \sqrt{a+3b-r}}{2\sqrt[8]{4(-a+b+r)(a+3b-r)}} \end{array}\right\} r = \sqrt{a^2+2ab+9b^2}$

273. $\left[x^4y + xy^4 = a\,(x^3y + xy^3) = b\,(x^4 + y^4)\right]$

L. $x = \dfrac{a}{4\,(a+b)}\left(a + 4b + r + \sqrt{(a+r)\,(3a-r)}\right)$
$y = \dfrac{a}{4\,(a+b)}\left(a + 4b + r - \sqrt{(a+r)\,(3a-r)}\right)$
$r = \sqrt{a^2 + 8b^2}$

274. $\left[a\,(x^3y + xy^3) = ab\,(x^3 + y^3) = b\,(x^4 + y^4)\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{a+b+\sqrt{(a+b)\,(r-3b)}}{2} \\ y = \dfrac{a+b-\sqrt{(a+b)\,(r-3b)}}{2} \end{array}\right\} r = \sqrt{a^2 + 8b^2}$

Man findet zunächst $x + y = a + b$.

275. $\left[\begin{array}{c} x^5 + y^5 = 2a\,(x+y)^3 \\ xy\,(x^2 + y^2) = 2b\,(x+y)^2 \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{-3a+5b+5r} + \sqrt{5a+5b-3r}\right)$
$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{-3a+5b+5r} - \sqrt{5a+5b-3r}\right)$
$r = \sqrt{a^2 + 2ab + 5b^2}$

276. $\left[\begin{array}{c} x^5 + y^5 = 2a\,(x+y) \\ x^3y + xy^3 = 2b \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{-3a+5b+5r} + \sqrt[4]{-3a-11b+5r}\right)$
$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{-3a+5b+5r} - \sqrt[4]{-3a-11b+5r}\right)$
r wie in 275.

277. $\left[\begin{array}{c} \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{a}{x^2+y^2} \\ \dfrac{x^3+y^3}{x^3-y^3} = \dfrac{b}{xy} \end{array}\right]$.

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a-b-r} + \sqrt{b+r}\right)\sqrt[4]{\dfrac{b+r}{2a-b-r}}$

$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a-b-r} - \sqrt{b+r}\right)\sqrt[4]{\dfrac{b+r}{2a-b-r}}$

$r = \sqrt{a^2 - 6ab + b^2}$

278. $\left[\begin{array}{c} xy\,(x+y)^2\,(x^3+y^3) = a \\ (x+y)^3\,(x^4+y^4) = b \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt[4]{14a-4b+5r} + \sqrt[4]{r-2a}}{2\sqrt[28]{(14a-4b+5r)^3}} \\ y = \dfrac{\sqrt[4]{14a-4b+5r} - \sqrt[4]{r-2a}}{2\sqrt[28]{(14a-4b+5r)^3}} \end{array}\right\} r = \sqrt{8a^2-4ab+b^2}$

Man erhält im Ganzen 28 Wurzelpaare. Die Elimination der einen Unbekannten liefert für die andere eine Gleichung vom 28. Grade.

279. $\left[a\,(x^5+y^5) = ab\,(x^4+y^4) = bxy\,(x^3+y^3)\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{a+b}{2}\left(1 + \sqrt{\dfrac{2a-r}{r-2b}}\right) \\ y = \dfrac{a+b}{2}\left(1 - \sqrt{\dfrac{2a-r}{r-2b}}\right) \end{array}\right\} r = \sqrt{4a^2 + (a-b)^2}$

280. $\left[a\,(x^5+y^5) = ab\,(x+y) = bxy\,(x^3+y^3)\right]$

L. $x = \dfrac{\sqrt{2b-r} + \sqrt{r-2a}}{2\sqrt[4]{r-2a}}$, $y = \dfrac{\sqrt{2b-r} - \sqrt{r-2a}}{2\sqrt[4]{r-2a}}$

$r = \sqrt{4a^2 + (a-b)^2}$

281. $\left[\begin{array}{c} (x-y)\,(x^3-y^3)\,(x^4-y^4) = (2a-b)\,(2b-a) \\ (x-y)\,(x^2+y^2)^2\,(x^3+y^3) = ab \end{array}\right]$

L. $x = \dfrac{\sqrt{3a-2b} + \sqrt{2b-a}}{2\sqrt[16]{a^2\,(3a-2b)\,(2b-a)}}$, $\dfrac{\sqrt{3b-2a} + \sqrt{2a-b}}{2\sqrt[16]{b^2\,(3b-2a)\,(2a-b)}}$

$y = \dfrac{\sqrt{3a-2b} - \sqrt{2b-a}}{2\sqrt[16]{a^2\,(3a-2b)\,(2b-a)}}$, $\dfrac{\sqrt{3b-2a} - \sqrt{2a-b}}{2\sqrt[16]{b^2\,(3b-2a)\,(2a-b)}}$

Die Gleichungen haben im Ganzen 32 Wurzelpaare. Die Elimination der einen Unbekannten muss für die andere eine Gleichung vom 32. Grade liefern.

282. $\left[\begin{matrix}(x^2+y^2)\,(x^3+y^3)=ab\\(x^2-y^2)\,(x^3-y^3)=(2a-b)\,(2b-a)\end{matrix}\right]$

L. $x=\dfrac{\sqrt{3a-2b}+\sqrt{2b-a}}{2\sqrt[10]{3a-2b}}, \dfrac{\sqrt{3b-2a}+\sqrt{2a-b}}{2\sqrt[10]{3b-2a}}$

$y=\dfrac{\sqrt{3a-2b}-\sqrt{2b-a}}{2\sqrt[10]{3a-2b}}, \dfrac{\sqrt{3b-2a}-\sqrt{2a-b}}{2\sqrt[10]{3b-2a}}$

283. $\left[\begin{matrix}(x^2+y^2)\,(x^3+y^3)=a^2-b^2\\x^5+y^5=a^2-5b^2\end{matrix}\right]$

L. $x=\dfrac{\sqrt{a+5b}+\sqrt{a-3b}}{2\sqrt[10]{a+5b}}, \dfrac{\sqrt{a-5b}+\sqrt{a+3b}}{2\sqrt[10]{a-5b}}$

$y=\dfrac{\sqrt{a+5b}-\sqrt{a-3b}}{2\sqrt[10]{a+5b}}, \dfrac{\sqrt{a-5b}-\sqrt{a+3b}}{2\sqrt[10]{a-5b}}$

284. $\left[\begin{matrix}x^5+y^5=(a^2-5b^2)\,(x^2+y^2)\\x^3+y^3=a^2-b^2\end{matrix}\right]$

L. $x=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\dfrac{a-3b}{a+5b}}\right)\sqrt[3]{(a+b)\,(a+5b)}$

$y=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\dfrac{a-3b}{a+5b}}\right)\sqrt[3]{(a+b)\,(a+5b)}$

Die Lösung gilt auch, wenn b überall mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen wird.

285. $\left[\begin{matrix}(x+y)\,(x^2+y^2)=a\\(x^2+y^2)\,(x^4+y^4)=b\end{matrix}\right]$

L. $x=\dfrac{a+\sqrt{-3a^2+2b+2r}}{2\sqrt[3]{-a^2+b+r}}$, $y=\dfrac{a-\sqrt{-3a^2+2b+2r}}{2\sqrt[3]{-a^2+b+r}}$,

$r=\sqrt{2a^4-2a^2b+b^2}$

286. $\left[\begin{matrix}x^4-y^4=a\,(x-y)\\x^4+y^4=b\,(x+y)\end{matrix}\right]$

L. $x=\dfrac{\sqrt{a-b+r}+\sqrt{a+b-r}}{2\sqrt[6]{a-b+r}}$, $y=\dfrac{\sqrt{a-b+r}-\sqrt{a+b-r}}{2\sqrt[6]{a-b+r}}$

$r=\sqrt{2a^2-2ab+b^2}$

Dazu kommen noch die Wurzeln 0 und $\sqrt[3]{b}$, wo $x=y$ ist.

287. $\left[\begin{matrix}x^4=ax+by\\y^4=bx+ay\end{matrix}\right]$

L. $x=\dfrac{\sqrt{r-2b}+\sqrt{2a-r}}{2\sqrt[6]{r-2b}}$, $y=\dfrac{\sqrt{r-2b}-\sqrt{2a-r}}{2\sqrt[6]{r-2b}}$,

$r=\sqrt{a^2-2ab+5b^2}$

Dazu kommen noch die Wurzeln 0 und $\sqrt[3]{a+b}$, wo $x = y$ ist. — Aus der Division der Summe und Differenz der gegebenen Gleichungen in einander ergiebt sich

$$\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)(x+y)^2} = \frac{a+b}{a-b}$$

Hieraus findet man

$$t = \sqrt{\frac{r-2b}{2a-r}} \text{ (vgl. 279. und 280.).}$$

Diese Formel für t ist zu benutzen für die Differenz der Gleichungen

$$(x+y)(x^2+y^2) = a-b.$$

Diese Aufgabe unterscheidet sich von der vorigen Aufgabe nur durch die Bekannten. Setzt man in 286. $a-b$ statt a und $a+b$ statt b, so erhält man durch Addition und Subtraction der Gleichungen die Aufgabe 287.

288. $\begin{bmatrix} x^3+y^3 = a(x^2-y^2) \\ x^4+y^4 = b(x^3-y^3) \end{bmatrix}$

L. $x = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3b-2a}+\sqrt{2a-b}-2\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a-b}-\sqrt{a-b}}$

$y = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3b-2a}-\sqrt{2a-b}+2\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a-b}-\sqrt{a-b}}$

289. $\begin{bmatrix} x^4+x^2y^2+y^4 = a(x+y)^2 \\ x^4+y^4 = b(x+y)^2 \end{bmatrix}$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a-b}+2\sqrt{a-b}+\sqrt{3b-2a}\right)$

$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a-b}+2\sqrt{a-b}-\sqrt{3b-2a}\right)$

290. $\begin{bmatrix} x^4+x^2y^2+y^4 = a(x-y)^2 \\ x^4+y^4 = b(x-y)^2 \end{bmatrix}$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3b-2a}+\sqrt{2a-b}-2\sqrt{a-b}\right)$

$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3b-2a}-\sqrt{2a-b}+2\sqrt{a-b}\right)$

291. $\begin{bmatrix} \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2} = a \\ \frac{x^5+y^5}{x^3-y^3} = b(x+y) \end{bmatrix}$

L. $x = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{5a-3r}+\sqrt{r+a}-2\sqrt{r-a}}{\sqrt{r+a}-\sqrt{r-a}}$

$y = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{5a-3r}-\sqrt{r+a}+2\sqrt{r-a}}{\sqrt{r+a}-\sqrt{r-a}}$

$r = \sqrt{a^2+4(a-b)^2}$

292. $\left[\begin{array}{c} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 2a\,(x+y)^2 \\ x^5 + y^5 = 2b\,(x+y)^3 \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r+a} + 2\sqrt{r-a} + \sqrt{5a-3r}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r+a} + 2\sqrt{r-a} - \sqrt{5a-3r}\right) \end{array}\right\}$ r wie in 291.

293. $\left[\begin{array}{c} \frac{x^3+y^3}{x-y} = a \\ \frac{x^5+y^5}{x^3-y^3} = b \end{array}\right]$

L. $x = \left(\sqrt{5a-6b+3r} + \sqrt{a+2b-r}\right)\sqrt[4]{\frac{a+2b-r}{4(5a-6b+3r)}}$

$y = \left(\sqrt{5a-6b+3r} - \sqrt{a+2b-r}\right)\sqrt[4]{\frac{a+2b-r}{4(5a-6b+3r)}}$

r wie in 291.

294. $\left[\begin{array}{c} x^4 + y^4 = a \\ x^5 + y^5 = b\,(x+y) \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{10a-14b+5r} + \sqrt[4]{-2a+2b+r}\right)$

$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{10a-14b+5r} - \sqrt[4]{-2a+2b+r}\right)$

$r = \sqrt{5a^2 - 12ab + 8b^2}$

Hebt man die 2. Gleichung durch $x+y$, so hat man

$$xy\,(x^2 - xy + y^2) = a - b$$

Jetzt ist t_4 zu bestimmen nach 236.

295. $\left[\begin{array}{c} x^4 + y^4 = 2a\,(x^2 - xy + y^2) \\ x^5 + y^5 = 2b\,(x^3 + y^3) \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5a-4b+r} + \sqrt{4b-3a+r}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5a-4b+r} - \sqrt{4b-3a+r}\right) \end{array}\right\}$ r wie in 294.

Man findet hier zunächst $xy = 2\,(a-b)$

296. $\left[\begin{array}{c} (x+y)\,(x^5 - y^5) = 4a \\ (x-y)\,(x^5 + y^5) = 4b \end{array}\right]$

L. $x = \dfrac{\sqrt[4]{5a-11b+5r} + \sqrt[4]{5b-11a+5r}}{2\sqrt[12]{5a+5b-3r}}$

$y = \dfrac{\sqrt[4]{5a-11b+5r} - \sqrt[4]{5b-11a+5r}}{2\sqrt[12]{5a+5b-3r}}$

$r = \sqrt{5a^2 - 6ab + 5b^2}$

---

297. $\left[\begin{array}{c} (x^2+xy+y^2)\,(x+y)^2 = a\,(5x^2+7xy+5y^2) \\ x^4 + y^4 = b\,(5x^2+7xy+5y^2) \end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3a-b+r} + \sqrt{6b-a}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3a-b+r} - \sqrt{6b-a}\right) \end{array}\right\}$ $r = \sqrt{8a^2+b^2}$

Nach 114. kommt man hier zunächst leicht auf $(x-y)^2 = 6b - a$. Darnach ist die Formel für t zu wählen; oder man sucht, da $x-y$ bekannt, nur noch $x+y$ u. s. w.

Die homogene symmetrische Gleichung des 4. Grades, aus welcher man t zu entwickeln hat, ist hier folgende:

$$(1) \qquad \frac{(x^2+xy+y^2)}{x^4+y^4}\frac{(x+y)^2}{} = \frac{a}{b}$$

Oben in 233. ist gezeigt, wie man aus einer solchen Gleichung t, d. h. $\frac{x+y}{x-y}$ findet, dass man beliebig viele solcher Formeln für t entwickeln kann, welche Formel für t sich in einem vorgelegten Falle gerade am meisten eignet, wie man diese direct erhält, welches der Zusammenhang unter den Formeln für t ist u. s. w. Es ist nun auch die Frage von Interesse: In welche beiden Gleichungen ist eine homogene symmetrische Gleichung des 4. Grades z. B. (1) [oder allgemein 233. (7)] zu zerlegen, damit sich eine bestimmte, aus jener Gleichung (1) hergeleitete Formel für t besonders eignet?

Aus (1) erhält man leicht:

$$t = \sqrt{\frac{3a-b+r}{6b-a}} = \sqrt{\frac{a}{-3a+b+r}} = \sqrt{\frac{2a-b+r}{2a+5b-r}}$$
$$= \sqrt{\frac{4a-b+r}{-4a+7b+r}} = \sqrt{\frac{r-b}{8a+3b-3r}} = \sqrt[4]{\frac{r-b}{17r-48a-b}} \text{ u. s. w.}$$

Wie diese Formeln gefunden werden und welche Bedeutung sie haben, übersieht man nach dem Obigen, insonderheit nach den Erörterungen in 233. leicht.

Nimmt man Beispiels halber einmal die 3. Formel

$$(2) \qquad \frac{x+y}{x-y} = \sqrt{\frac{2a-b+r}{2a+5b-r}},$$

so wird diese Gleichung nur eine andere Form der Gleichung (1) sein. Soll daher dieselbe in möglichst einfacher Weise erfüllt werden, so wird man setzen müssen

$$(3) \qquad \left[\begin{array}{l} x+y = \sqrt{2a-b+r} \\ x-y = \sqrt{2a+5b-r} \end{array}\right]$$

So wird die Gleichung (2) und folglich auch die Gleichung (1) erfüllt. Aus diesen Gleichungen (3) ist r zu eliminiren und das Resultat mit (1) zu combiniren. Aus (3) hat man darnach

$$(4) \qquad x^2 + y^2 = 2(a+b)$$

Jetzt transformirt man (1) mit Hülfe der corr. Add. (I, 18.) so, dass rechts $2(a+b)$ erscheint, nämlich

$$\frac{(x^2+xy+y^2)(x+y)^2}{(x^2+xy+y^2)(x+y)^2+(x^4+y^4)} = \frac{2a}{2(a+b)}, \text{ d. h.}$$

$$\frac{(x^2+xy+y^2)(x+y)^2}{(2x^2+3xy+2y^2)(x^2+y^2)} = \frac{2a}{2(a+b)}$$

Dies mit (4) multiplicirt, liefert

$$\frac{(x^2+xy+y^2)(x+y)^2}{2x^2+3xy+2y^2} = 2a$$

Damit hat man die erste der gesuchten Gleichungen. Dividirt man die Gleichung (1) in diese, so erhält man auch die zweite, so dass

$$(4)\quad \left[\begin{array}{c}(x^2+xy+y^2)(x+y)^2 = 2a(2x^2+3xy+2y^2)\\ x^4+y^4 = 2b(2x^2+3xy+2y^2)\end{array}\right]$$

die beiden Gleichungen sind, in welche die Gleichung (1) zerlegt werden muss, wenn die Formel $t_{x^2+y^2}$ in (2) zur Anwendung besonders geeignet sein soll. Die Lösung von (4) folgt dann aus (3):

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2a-b+r}+\sqrt{2a+5b-r}\right)$$
$$y = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2a-b+r}-\sqrt{2a+5b-r}\right)$$

Im Grunde bestand diese Zerlegung nur in der Bestimmung der Grössen a und b aus den Gleichungen (3) und (1).

Auf diese Weise wird man für jede der oben für t angegebenen Formeln leicht die beiden Gleichungen aufstellen können, in welche man die Gleichung (1) zu zerlegen hat, damit ein bestimmtes t besonders anwendbar ist.

Für die 5. Formel

$$t = \sqrt{\frac{r-b}{8a+3b-3r}}$$

müsste man z. B. die Gleichung (1) so zerlegen:

$$\left[\begin{array}{c}x^2+xy+y^2 = 2a\\ x^4+y^4 = 2b(x+y)^2\end{array}\right]$$

Man würde erhalten:

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{r-b}+\sqrt{8a+3b-3r}\right),\quad y = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{r-b}+\sqrt{8a+3b-3r}\right)$$

Für die 6. Formel

$$t = \sqrt[4]{\frac{r-b}{17r-48a-b}}$$

müsste man so zerlegen

$$\left[\begin{matrix}(x^2+xy+y^2)\,(x+y)^2=2a\\ x^4+y^4=2b\end{matrix}\right]$$

und würde erhalten

$$x=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[4]{r-b}+\sqrt[4]{17r-48a-b}\right),\ y=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[4]{r-b}-\sqrt[4]{17r-48a-b}\right)$$

298. $$\left[\begin{matrix}(x+y)\,(x^2+xy+y^2)=a\,(x-y)\\ (x-y)\,(x^2-xy+y^2)=b\,(x+y)\end{matrix}\right]$$

L. $$x=\tfrac{1}{4}\left(\sqrt[4]{17a+b-r}+\sqrt[4]{a+17b-r}\right)\sqrt[4]{\frac{r-a-b}{3}}$$

$$y=\tfrac{1}{4}\left(\sqrt[4]{17a+b-r}-\sqrt[4]{a+17b-r}\right)\sqrt[4]{\frac{r-a-b}{3}}$$

$$r=\sqrt{a^2+34ab+b^2}$$

Für die vorliegenden Gleichungen ist t zu bestimmen aus

(1) $$\frac{(x+y)^2\,(x^2+xy+y^2)}{(x-y)^2\,(x^2-xy+y^2)}=\frac{a}{b}.$$

Man findet aus dieser Gleichung folgende Formeln für t:

1. $\sqrt{\dfrac{a-b+r}{6b}}$ 2. $\sqrt{\dfrac{6a}{-a+b+r}}$

3. $\sqrt{\dfrac{5a+b-r}{-a-5b+r}}$ 4. $\sqrt{\dfrac{7a-b+r}{7b-a+r}}$

5. $\sqrt{\dfrac{17a+b-r}{3\,(-a-b+r)}}$ 6. $\sqrt{\dfrac{3\,(-a-b+r)}{a+17b-r}}$

7. $\sqrt{\dfrac{a\,(a+5b+r)}{b\,(5a+b+r)}}$ 8. $\sqrt{\dfrac{a\,(a-7b+r)}{b\,(7a-b-r)}}$

9. $\sqrt{\dfrac{a\,(a+17b+r)}{3b\,(a+b+r)}}$ 10. $\sqrt{\dfrac{3a\,(a+b+r)}{b\,(17a+b+r)}}$

11. $\sqrt[4]{\dfrac{17a+b-r}{a+17b-r}}$ 12. $\sqrt[4]{\dfrac{a\,(a-b+r)}{b\,(-a+b+r)}}$ 13. $\sqrt[4]{\dfrac{a^2\,(a+17b+r)}{b^2\,(17a+b+r)}}$

$$r=\sqrt{a^2+34ab+b^2}$$

Die ersten 6 Formeln sind, wie man nach 233. d. leicht erkennt, die für t mit dem Index

$$x-y,\ x+y,\ x^2+y^2,\ xy,\ x^2+xy+y^2,\ x^2-xy+y^2$$

und ist in 233. angegeben, wie sie gefunden werden. — Die 7. Formel folgt aus der 3., wenn man das r des Nenners in den Zähler schafft und das des Zählers in den Nenner, also mit

$$\frac{5a+b+r}{a+5b+r}$$

unter der Wurzel multiplicirt und nach ausgeführter Multiplication wieder durch dieselbe Grösse dividirt. — In ähnlicher Weise

werden die 3 folgenden Formeln 8., 9. und 10. aus den Formeln 4., 6. und 5. abgeleitet. — Die 11. Formel ist t_4 und wird nach 236. gefunden, nämlich aus der Multiplication von 2. und 5., oder von 1. und 6., oder noch einfacher von 5. und 6. — Die 12. Formel folgt aus der Multiplication der 1. und 2., die 13. Formel aus der Multiplication der 9. und 10. Formel.

Diese verschiedenen Formeln für t können sich nur dann so einfach gestalten, wenn in t_{x-y} und in t_{x+y} resp. im Nenner und im Zähler einfache Buchstaben a und b stehen. Dies ist dann stets der Fall, wenn $(x+y)^2$ und $(x-y)^2$ Factoren des Zählers und Nenners der linken Seite der homogenen symmetrischen Gleichung des 4. Grades [hier von (1)] sind, deren rechte Seite $\frac{a}{b}$ ist.

Die folgenden 6 Aufgaben sind nach der in 297. angegebenen Weise gebildet, jede als für eine der obigen Formeln für t (11., 7., 4., 7., 8., 13.) besonders passend.

299. $$\left[\begin{array}{l}(x+y)^2\,(x^2+xy+y^2) = 12\,a\\(x-y)^2\,(x^2-xy+y^2) = 12\,b\end{array}\right]$$

L. $$x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[4]{17a+b-r} + \sqrt[4]{a+17b-r}\right)$$
$$y = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[4]{17a+b-r} - \sqrt[4]{a+17b-r}\right)$$
$$r = \sqrt{a^2+34ab+b^2}$$

300. $$\left[\begin{array}{l}xy\,(x+y)^2 = a\,(x^2-xy+y^2)\\xy\,(x-y)^2 = b\,(x^2+xy+y^2)\end{array}\right]$$

L. $$\left.\begin{array}{l}x = \dfrac{\sqrt{a\,(a+5b+r)}+\sqrt{b\,(5a+b+r)}}{2\sqrt{2\,(a-b)}}\\[2ex] y = \dfrac{\sqrt{a\,(a+5b+r)}-\sqrt{b\,(5a+b+r)}}{2\sqrt{2\,(a-b)}}\end{array}\right\}\ r \text{ wie oben.}$$

301. $$\left[\begin{array}{l}(x^2+xy+y^2)\,(x+y)^2 = 3\,a\,(x^2+y^2)\\(x^2-xy+y^2)\,(x-y)^2 = 3\,b\,(x^2+y^2)\end{array}\right]$$

L. $$\left.\begin{array}{l}x = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{7a-b+r}+\sqrt{7b-a+r}\right)\\ y = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{7a-b+r}-\sqrt{7b-a+r}\right)\end{array}\right\}\ r \text{ wie oben.}$$

302. $$\left[\begin{array}{l}\dfrac{(x+y)^4\,(x^2+xy+y^2)}{(x^2+y^2)\,(x^2-xy+y^2)} = 3\,a^2\\[2ex] \dfrac{(x-y)^4\,(x^2-xy+y^2)}{(x^2+y^2)\,(x^2+xy+y^2)} = 3\,b^2\end{array}\right]$$

L. $$\left.\begin{array}{l}x = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{a\,(a+5b+r)}+\sqrt{b\,(5a+b+r)}\right)\\ y = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{a\,(a+5b+r)}-\sqrt{b\,(5a+b+r)}\right)\end{array}\right\}\ r \text{ wie oben.}$$

Weil die Quadrate von a und b gegeben sind, so können in der Lösung a und b selber beliebige Zeichen haben. In der Lösung ist kurz gesetzt $\sqrt{a^2} = a$ und $\sqrt{b^2} = b$, obwohl ebenso gut noch gelten $-a$ und $+b$, $+a$ und $-b$, $-a$ und $-b$. — Im Ganzen erhält man jedoch nur 16 Wurzelpaare. — Man findet zunächst

$$\frac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2} = 3ab$$

303. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(x+y)^4\,(x^2+xy+y^2)}{xy\,(x^2-xy+y^2)} = 6a^2 \\ \dfrac{(x-y)^4\,(x^2-xy+y^2)}{xy\,(x^2+xy+y^2)} = 6b^2 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{L. } x = \frac{1}{4}\left(\sqrt{a\,(a-7b+r)}+\sqrt{b\,(7a-b-r)}\right) \\ \qquad y = \frac{1}{4}\left(\sqrt{a\,(a-7b+r)}-\sqrt{b\,(7a-b-r)}\right) \end{array}\right\} \; r \text{ wie oben.}$$

Man findet hier zunächst $(x^2-y^2)^2 = 6abxy$. — Für die Zeichen von a und b gilt auch hier das bei 302. Gesagte.

304. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2\,(x+y)^6\,(x^2+xy+y^2)}{(x^2-xy+y^2)^2} = 3a^3 \\ \dfrac{2\,(x-y)^6\,(x^2-xy+y^2)}{(x^2+xy+y^2)^2} = 3b^3 \end{array}\right]$$

$$\text{L. } x = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt[4]{a^2\,(a+17b+r)}+\sqrt[4]{b^2\,(17a+b+r)}\right)$$
$$y = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt[4]{a^2\,(a+17b+r)}-\sqrt[4]{b^2\,(17a+b+r)}\right)$$

Die Dreideutigkeit der Kubikwurzel ist in der Lösung nicht berücksichtigt. Es ist kurz gesetzt

$$\sqrt[3]{a^3} = a \text{ und } \sqrt[3]{b^3} = b$$

---

305. $$\left[\begin{array}{l} (x+y)\,(x^3+y^3) = 4a \\ (x-y)\,(x^3-y^3) = 4b \end{array}\right]$$

$$\text{L. } x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[4]{7a-9b+3r}+\sqrt[4]{7b-9a+3r}\right)$$
$$y = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[4]{7a-9b+3r}-\sqrt[4]{7b-9a+3r}\right)$$
$$r = \sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$$

Für t findet man hier folgende Formeln:

1. $\sqrt{\dfrac{3a-3b+r}{2b}}$
2. $\sqrt{\dfrac{2a}{3b-3a+r}}$
3. $\sqrt{\dfrac{a-3b+r}{3a-b-r}}$
4. $\sqrt{\dfrac{5a-3b+r}{5b-3a+r}}$
5. $\sqrt{\dfrac{7a-9b+3r}{3a+3b-r}}$
6. $\sqrt{\dfrac{3a+3b-r}{7b-9a+3r}}$

7. $\sqrt{\frac{a\,(3a-b+r)}{b\,(3b-a+r)}}$ 8. $\sqrt{\frac{a\,(3a-5b+r)}{b\,(5a-3b-r)}}$

9. $\sqrt{\frac{a\,(3a+3b+r)}{b\,(9b-7a+3r)}}$ 10. $\sqrt{\frac{a\,(9a-7b+3r)}{b\,(3a+3b+r)}}$

11. $\sqrt[4]{\frac{7a-9b+3r}{7b-9a+3r}}$ 12. $\sqrt[4]{\frac{a\,(3a-3b+r)}{b\,(3b-3a+r)}}$ 13. $\sqrt[4]{\frac{a^2\,(9a-7b+3r)}{b^2\,(9b-7a+3r)}}$

$$r = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$$

Diese Formeln werden auf dieselbe Weise gefunden und aus einander abgeleitet, wie die in 298. angegebenen. — Für die nachstehenden Aufgaben ist jedesmal eine dieser Formeln (3., 4., 5., 6., 7., 8., 12., 13.) besonders geeignet. — Wären die Formeln für t nicht schon entwickelt, so würde man in den 4 nächsten Aufgaben sehr leicht zur Lösung gelangen, wenn man xy und $x^2 + y^2$ zunächst bestimmte.

306. $\left[\begin{array}{l}(x+y)\,(x^3+y^3) = axy \\ (x-y)\,(x^3-y^3) = bxy\end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{4}\left(\sqrt{a-3b+r} + \sqrt{3a-b-r}\right)$

$y = \frac{1}{4}\left(\sqrt{a-3b+r} - \sqrt{3a-b-r}\right)$

$r = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$

Man findet hier zunächst $2\,(x^2+y^2) = a - b$, hat also $t_{x^2+y^2}$ anzuwenden.

307. $\left[\begin{array}{l}(x+y)\,(x^3+y^3) = a\,(x^2+y^2) \\ (x-y)\,(x^3-y^3) = b\,(x^2+y^2)\end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5a-3b+r} + \sqrt{5b-3a+r}\right) \\ y = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5a-3b+r} - \sqrt{5b-3a+r}\right)\end{array}\right\}$ r wie oben.

Man hat zunächst $2xy = a - b$

308. $\left[\begin{array}{c} x^2 - xy + y^2 = a \\ x^2 + xy + y^2 = b\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2\end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}\left(\sqrt{7a-9b+3r} + \sqrt{3a+3b-r}\right) \\ y = \frac{1}{4}\left(\sqrt{7a-9b+3r} - \sqrt{3a+3b-r}\right)\end{array}\right\}$ r wie oben.

309. $\left[\begin{array}{c} x^2 - xy + y^2 = a\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 \\ x^2 + xy + y^2 = b\end{array}\right]$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3a+3b-r} + \sqrt{7b-9a+3r}\right) \\ y = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3a+3b-r} - \sqrt{7b-9a+3r}\right)\end{array}\right\}$ r wie oben.

Die Lösung dieser Aufgabe muss aus der vorhergehenden folgen, wenn man y mit entgegengesetztem Zeichen nimmt und a und b vertauscht.

310. $$\left[\begin{array}{c} \dfrac{(x+y)^3\,(x^3+y^3)}{(x^2+xy+y^2)\,(x^2+y^2)} = a^2 \\ \dfrac{(x-y)^3\,(x^3-y^3)}{(x^2-xy+y^2)\,(x^2+y^2)} = b^2 \end{array}\right]$$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}\left(\sqrt{a\,(3a-b+r)}+\sqrt{b\,(3b-a+r)}\right) \\ y = \frac{1}{4}\left(\sqrt{a\,(3a-b+r)}-\sqrt{b\,(3b-a+r)}\right) \end{array}\right\}$ r wie oben.

In Bezug auf die Zeichen von a und b gilt auch hier das zu 302. Bemerkte. — Ebenso bei den beiden folgenden Aufgaben.

311. $$\left[\begin{array}{c} \dfrac{(x+y)^3\,(x^3+y^3)}{2xy\,(x^2+xy+y^2)} = a^2 \\ \dfrac{(x-y)^3\,(x^3-y^3)}{2xy\,(x^2-xy+y^2)} = b^2 \end{array}\right]$$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}\left(\sqrt{a\,(3a-5b+r)}+\sqrt{b\,(5a-3b-r)}\right) \\ y = \frac{1}{4}\left(\sqrt{a\,(3a-5b+r)}-\sqrt{b\,(5a-3b-r)}\right) \end{array}\right\}$ r wie oben.

312. $$\left[\begin{array}{l} (x^3+y^3)\,(x+y)^3 = 2a^2\,(x^2+xy+y^2) \\ (x^3-y^3)\,(x-y)^3 = 2b^2\,(x^2-xy+y^2) \end{array}\right]$$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}\left(\sqrt[4]{a\,(3a-3b+r)}+\sqrt[4]{b\,(3b-3a+r)}\right) \\ y = \frac{1}{4}\left(\sqrt[4]{a\,(3a-3b+r)}-\sqrt[4]{b\,(3b-3a+r)}\right) \end{array}\right.$

313. $$\left[\begin{array}{c} \dfrac{(x^3+y^3)\,(x+y)^5}{(x^2+xy+y^2)^2} = 8a^3 \\ \dfrac{(x^3-y^3)\,(x-y)^5}{(x^2-xy+y^2)^2} = 8b^3 \end{array}\right]$$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{a^2\,(9a-7b+3r)}+\sqrt[4]{b^2\,(9b-7a+3r)}\right) \\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{a^2\,(9a-7b+3r)}-\sqrt[4]{b^2\,(9b-7a+3r)}\right) \end{array}\right.$

r wie oben.

Die Bemerkung zu 304. gilt auch für diese Aufgabe.

314. $$\left[\begin{array}{l} xy\,(x+y)\,(x^3+y^3) = a \\ xy\,(x-y)\,(x^3-y^3) = b \end{array}\right]$$

L. $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{a-3b+r}+\sqrt{3a-b-r}}{2\sqrt[3]{r-a-b}} \\ y = \dfrac{\sqrt{a-3b+r}-\sqrt{3a-b-r}}{2\sqrt[3]{r-a-b}} \end{array}\right\}$ r wie oben.

Hier ist zur Darstellung der Unbekannten $t_{x^2+y^2}$ angewendet.

C.

Gleichungen verschiedenen Charakters.

315. $\left[\begin{array}{c} x\,(x+y)\,(x+2y)\,(x+3y) = a \\ 2x+3y = b \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(b - \sqrt{5b^2+4r}\right)$, $y = \frac{1}{3}\sqrt{5b^2+4r}$, $r = \sqrt{9a+b^4}$

Die Factoren der 1. Gleichung links bilden eine arithmetische Progression. Die Differenz ist y. Diese ist zu suchen, also x zu eliminiren. Man erhält

$$(b-3y)\,(b-y)\,b+y)\,(b+3y) = 16\,a,$$

woraus y gefunden wird, wie angegeben. — In Worten heisst die vorgelegte Aufgabe so:

> Wie heisst das 1. Glied x und die Differenz y einer arithmetischen Progression von 4 Gliedern, wenn das Product derselben $= a$ und die Summe derselben $= 2b$ ist.

Für eine arithmetische Progression von 5 Gliedern liesse sich ganz dieselbe Aufgabe lösen. In diesem Falle würde das mittlere Glied bekannt sein.

316. $\left[\begin{array}{c} x\,(x+y)\,(x+2y)\,(x+3y) = a \\ (2x+3y)\,y = b \end{array}\right]$

L. $x = \dfrac{b-3y^2}{2y}$, $y = \sqrt[4]{\dfrac{8a+5b^2+4r}{9}}$,

$r = \sqrt{(4a+b^2)\,(a+b^2)}$

Auch hier ist wiederum y zu suchen, indem man x eliminirt. Man multiplicirt zu dem Zwecke die 1. Gleichung mit $16y^4$, also links jeden Factor mit $2y$ und setzt überall aus der 2. Gleichung $b - 3y^2$ für $2xy$. Das giebt

$$(b-3y^2)\,(b-y^2)\,(b+y^2)\,(b+3y^2) = 16\,a\,y^4 \text{ u. s. w.}$$

Auch diese Aufgabe ist leicht in Worte gekleidet; sie würde etwa so heissen:

> Für eine arithmetische Progression von 4 Gliedern ist das Product aller 4 Glieder $= a$, das Product aus der Summe und der Differenz der beiden mittleren Glieder $= b$. Wie heisst das 1. Glied und die Differenz der Progression? — Das 1. Glied ist x, die Differenz y.

317. $\left[\begin{array}{c} x\,(x+y)\,(x+2\,y)\,(x+3\,y) = a \\ (x+y)^2 + (x+2\,y)^2 = b \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\,b - y^2} - 3\,y\right),\ y = \sqrt{\frac{3\,b + 2\,r}{5}},\ r = \sqrt{5\,a + b^2}$

Auch hier ist wiederum y zu bestimmen. Man multiplicire in der 1. Gleichung die beiden inneren Factoren mit einander und ebenso die beiden äusseren. Multiplicirt man dann noch mit 4, so kann man aus der 2. Gleichung leicht

$$2\,x^2 + 6\,x\,y = b - 5\,y^2$$

substituiren und erhält

$$(b - 5\,y^2)\,(b - y^2) = 4\,a$$

In Worten würde diese Aufgabe etwa so heissen:

Es wird das 1. Glied und die Differenz einer arithmetischen Progression von 4 Gliedern gesucht, wenn das Product der 4 Glieder $= a$ und die Summe der Quadrate der beiden mittleren Glieder $= b$ ist.

318. $\left[\begin{array}{l} \frac{1 + x + x^2}{1 + y + y^2} = a \\ \frac{1 + y + x^2}{1 + x + y^2} = b \end{array}\right]$

L. $x = \frac{2\,a\,b + a + b + r}{2\,(a - b)},\ y = -\frac{a + b + 2 + r}{2\,(a - b)}$

$$r = \sqrt{4\,a\,(b^2 + b + 1) + (3\,a - b)\,(3\,b - a)}$$

Mittelst corr. Add. erhält man aus den gegebenen Gleichungen zunächst

$$\frac{2 + x + y + x^2 + y^2}{(x - y)\,(x + y + 1)} = \frac{a + 1}{a - 1}$$

$$\frac{2 + x + y + x^2 + y^2}{(x - y)\,(x + y - 1)} = \frac{b + 1}{b - 1}$$

Die Division dieser Gleichungen in einander giebt

$$\frac{x + y + 1}{x + y - 1} = \frac{(a - 1)\,(b + 1)}{(a + 1)\,(b - 1)},\ \text{also}$$

$$x + y = \frac{a\,b - 1}{a - b}$$

Jetzt ist noch $x - y$ zu suchen, am einfachsten nach 142. Man erhält

$$(a - b)\,(x - y) = (a + 1)\,(b + 1) + r \text{ u. s. w.}$$

319. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x+x^2}{y+y^2} = a \\ \dfrac{y+x^2}{x+y^2} = b \end{array}\right]$$

L. x und y sonst wie in 318., nur

$$r = \sqrt{4a\,(b^2+b+1) + (a+b)^2}$$

320. $$\left[\begin{array}{c} x+y = a \\ xy + \sqrt{(1-x^2)\,(1-y^2)} = b \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1}{2}\,(a+r) \qquad y = \frac{1}{2}\,(a-r)$

$$r = \sqrt{(b-1)\left(\frac{a^2}{b+1} - 2\right)}$$

321. $$\left[\begin{array}{c} \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a \\ xy + \sqrt{(1-x^2)\,(1-y^2)} = b \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\,(1+b) - a^2} + a\sqrt{\dfrac{1-b}{1+b}}\right)$

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\,(1+b) - a^2} - a\sqrt{\frac{1-b}{1+b}}\right)$$

Man schaffe aus beiden Gleichungen die Wurzeln fort, so findet man leicht x^2+y^2 und xy.

322. $$\left[\begin{array}{l} \sqrt{xy} + \sqrt{(1-x)\,(1-y)} = a \\ \sqrt{x\,(1-y)} + \sqrt{y\,(1-x)} = b \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1}{2}\left(1 + a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right)$

$$y = \frac{1}{2}\left(1 + a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}\right)$$

Die Differenz der Quadrate der Gleichungen liefert

(1) $$1 - 2\,(x+y) + 4xy = a^2 - b^2$$

Isolirt man in der 1. Gleichung die 2. Quadratwurzel und quadrirt, so ergiebt sich

$$x + y - 2a\sqrt{xy} = 1 - a^2$$

Diese Gleichung ist mit (1) zu combiniren. Das giebt $x+y$ und $\sqrt{xy}$.

Auch trigonometrisch kommt man hier sehr leicht zum Ziele. Man setzt

(2) $$x = \sin\xi^2, \quad y = \sin\eta^2, \quad a = \sin\alpha, \quad b = \sin\beta.$$

Dann gehen die gegebenen Gleichungen über in

$$\left[\begin{array}{l} \cos\,(\xi - \eta) = \sin\alpha \\ \sin\,(\xi + \eta) = \sin\beta \end{array}\right]$$

Es kann also sein

$$\xi - \eta = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ oder } \alpha - \frac{\pi}{2}$$
$$\xi + \eta = \beta \quad ,, \quad \pi - \beta$$

Das giebt folgende Combinationen:

$$\xi - \eta = \frac{\pi}{2} - \alpha,\ \alpha - \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} - \alpha,\ \alpha - \frac{\pi}{2}$$
$$\xi + \eta = \beta,\quad \beta,\quad \pi - \beta,\ \pi - \beta$$

Also durch Addition und Subtraction

$$2\xi = \frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta),\ \alpha + \beta - \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} - (\alpha + \beta),\ \frac{\pi}{2} + (\alpha - \beta)$$
$$2\eta = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta),\ \frac{\pi}{2} + (\alpha - \beta),\ \frac{3\pi}{2} - (\alpha + \beta)$$

Für das 1. Paar von Werthen hat man nach (2)

$$x = \sin \xi^2 = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\xi) = \tfrac{1}{2}\left[1 - \sin(\alpha - \beta)\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}(1 - \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta)$$
$$y = \sin \eta^2 = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\eta) = \tfrac{1}{2}\left[1 - \sin(\alpha + \beta)\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}(1 - \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta).$$

d. h. $x = \tfrac{1}{2}\left(1 - a\sqrt{1 - b^2} + b\sqrt{1 - a^2}\right)$

$$y = \tfrac{1}{2}\left(1 - a\sqrt{1 - b^2} - b\sqrt{1 - a^2}\right)$$

Die 3 andern Paare der Werthe von 2ξ und 2η geben die 3 andern noch möglichen Zeichencombinationen der vorkommenden Quadratwurzeln, so dass die Gleichungen im Ganzen 4 Paare von Wurzeln haben, wie 4 Paare von Werthen für ξ und η gefunden sind.

323.
$$\left[\begin{array}{c} xy + \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)} = a \\ x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - b^2} \end{array}\right]$$

L. $x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{(1 + a)(1 + b)} + \sqrt{(1 - a)(1 - b)}\right)$
$y = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{(1 + a)(1 + b)} - \sqrt{(1 - a)(1 - b)}\right)$

Das b kann auch das entgegengesetzte Zeichen in der Lösung haben. Die Gleichungen liefern also im Ganzen 8 Paare von Wurzeln. — Zunächst findet man hier

$$2xy = a + b \qquad x^2 + y^2 = 1 + ab$$

Dass man auch hier, wie in den beiden folgenden Aufgaben, sehr gut trigonometrisch lösen kann, übersieht man leicht.

324. $$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x\,(1-y)} + \sqrt{y\,(1-x)} = a \\ \sqrt{x\,(1-x)} + \sqrt{y\,(1-y)} = b \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b}{a}\sqrt{1-a^2} + \sqrt{a^2-b^2}\right)$

$$y = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b}{a}\sqrt{1-a^2} - \sqrt{a^2-b^2}\right)$$

Aus der Differenz der Quadrate ergiebt sich $x - y = \sqrt{a^2-b^2}$. Jetzt ist nur noch $x + y$ zu suchen.

325. $$\left[\begin{array}{l} x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-b^2} \\ x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} = a\sqrt{1-b^2} \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 323.

Durch Division der 1. Gleichung in die 2. Gleichung erhält man nämlich die 1. Gleichung in 323.; denn es ist

$$\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)\left(xy + \sqrt{(1-x^2)\,(1-y^2)}\right) = x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2}$$

Diese Gleichung giebt nur den bekannten Satz aus der Trigo no metrie

$$\sin(\xi+\eta)\cdot\cos(\xi-\eta) = \sin\xi\cdot\cos\xi + \sin\eta\cdot\cos\eta$$

$$\text{oder } \sin(\xi+\eta)\cdot\cos(\xi-\eta) = \tfrac{1}{2}(\sin 2\xi + \sin 2\eta)$$

Man hätte daher statt der gegebenen Gleichungen auch die Gleichungen 323. setzen können.

326. $$\left[\begin{array}{c} \dfrac{x+1}{y+1} = a\left(\dfrac{x-1}{y-1}\right) \\ \dfrac{x^2+x+1}{y^2+y+1} = b\left(\dfrac{x-1}{y-1}\right)^2 \end{array}\right]$$

L. $x = \dfrac{av+1}{av-1}$, $y = \dfrac{v+1}{v-1}$, $v = \sqrt{\dfrac{b-1}{3\,(a^2-b)}}$

Man setze

$$\frac{y+1}{y-1} = v.$$

Dann wird wegen der 1. Gleichung

$$\frac{x+1}{x-1} = av$$

Man hat also x und y, wie angegeben. Um v zu bestimmen hat man die für x und y gefundenen Ausdrücke in der 2. Gleichung zu substituiren. Das giebt

$$\frac{3a^2v^2+1}{3v^2+1} = b,$$

woraus v, wie angegeben, folgt.

Setzt man $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{13}{28}$, so erhält man

$$x = 3, \frac{1}{3}$$
$$y = 2, \frac{1}{2}$$

327. $$\left[\begin{array}{c} \frac{x+1}{y+1} = \frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{y-1}\right) \\ \frac{x^2+x+1}{y^2+y+1} = \frac{31}{39}\left(\frac{x^2-x+1}{y^2-y+1}\right) \end{array}\right]$$

L. $x = 5, \frac{1}{5}, -3, -\frac{1}{3}$
$y = 3, \frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{5}$

Man findet hier zunächst nach der vorigen Aufgabe

$$v = \pm 2, \pm \frac{2}{3}$$

328. $$\left[\begin{array}{c} \frac{x+1}{y+1} = a\left(\frac{x-1}{y-1}\right) \\ \frac{x^5+1}{y^5+1} = b\left(\frac{x-1}{y-1}\right)^5 \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 326., nur

$$v = \sqrt{\frac{r-5(a^3-b)}{a^5-b}}, \quad r = \sqrt{20(a^3-b)^2+5ab(a^2-1)^2}$$

329. $$\left[\begin{array}{c} \frac{x+1}{y+1} = a\left(\frac{x-1}{y-1}\right) \\ \frac{x^5-1}{y^5-1} = b\left(\frac{x-1}{y-1}\right)^5 \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 326., nur

$$v = \sqrt{\frac{-a^2+b+r}{a^4-b}}, \quad r = \sqrt{\frac{4(a^2-b)^2+(a^2-1)^2b}{5}}$$

330. $$\left[\begin{array}{c} \frac{x+1}{y+1} = a\left(\frac{x-1}{y-1}\right) \\ \frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{y^4-y^3+y^2-y+1} = b\left(\frac{x-1}{y-1}\right)^4 \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 326., nur

$$v = \sqrt{\frac{r-5(a^2-b)}{a^4-b}}, \quad r = \sqrt{20(a^2-b)^2+5b(a^2-1)^2}$$

Die Aufgabe 328. ist von dieser nicht verschieden, wenn man dort ab statt b setzt; die Lösung dieser Aufgabe ist also aus der Lösung jener hinzuschreiben.

331. $\left[\begin{array}{l} \frac{x+1}{y+1} = a\left(\frac{x-1}{y-1}\right) \\ \frac{x^6-1}{y^6-1} = b\left(\frac{x-1}{y-1}\right)^6 \end{array}\right]$

L. x und y wie in 326., nur

$$v = \sqrt{\frac{-5(a^3-b)+r}{3(a^5-b)}},\quad r = \sqrt{16(a^3-b)^2 + 9ab(a^2-1)^2}$$

---

332. $\left[\begin{array}{l} (b+c)x^4 = c(x+y)^4 + \frac{1}{2}a^4 \\ (b+c)y^4 = b(x-y)^4 - \frac{1}{2}a^4 \end{array}\right]$

L. $x = \frac{a(\sqrt{7b-c} + \sqrt{7c-b})}{2R}$, $y = \frac{a(\sqrt{7b-c} - \sqrt{7c-b})}{2R}$

$$R = \sqrt[4]{b(7c-b)^2 - c(7b-c)^2 + 3(b+c)^2\sqrt{(7b-c)(7c-b)}}$$

Dazu kommt noch

$$x = 0,\quad \frac{a}{\sqrt[4]{2b}}$$

$$y = \frac{a}{\sqrt[4]{-2c}},\quad 0$$

Die Addition der Gleichungen liefert

$$2(b-c)xy(x^2+y^2) = 3(b+c)x^2y^2.$$

Diese Gleichung zerfällt in

1. $x = 0$ 2. $y = 0$ 3. $2(b-c)(x^2+y^2) = 3(b+c)xy$

Diese Gleichungen sind einzeln zu combiniren mit einer der gegebenen Gleichungen oder mit ihrer Differenz. Aus der Gleichung 3. kann man das Verhältniss der Unbekannten finden:

$$\frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{3(b+c)}{4(b-c)},\quad \frac{x+y}{x-y} = \sqrt{\frac{7b-c}{7c-b}},\ \text{also}$$

$$x = \lambda\left(\sqrt{7b-c} + \sqrt{7c-b}\right)$$

$$y = \lambda\left(\sqrt{7b-c} - \sqrt{7c-b}\right)\ \text{u. s. w.}$$

333. $\left[\begin{array}{l} x^4 = c(x+y)^4 + \frac{1}{2}a^4 \\ y^4 = b(x-y)^4 - \frac{1}{2}a^4 \end{array}\right]$

L. $x = \lambda(t+1)$, $\quad y = \lambda(t-1)$

$$t = \sqrt{\frac{3+\sqrt{9-(8b-1)(8c-1)}}{8c-1}},\ \lambda = \frac{a}{\sqrt[4]{16(b-ct^4)+8t(t^2+1)}}$$

Man addire die Gleichungen und mache die in der Lösung angegebene Substitution [233. (12)], so findet man t. Um λ zu bestimmen, substituire man in der Differenz der gegebenen Gleichungen.

---

334. $\left[\begin{array}{c} x + y = 3 \\ (x-1)^4 + (y+1)^4 = 17 \end{array}\right]$

L. $x = 3,\ 2,\ \frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{-55}\right)$

$y = 0,\ 1,\ \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{-55}\right)$

Nach 142. bestimme man hier zunächst $x - y$. — Diese Aufgabe ist gebildet aus der Aufgabe 143. Man hat darin allgemein

$$x - m \text{ für } x, \quad y - n \text{ für } y$$

zu setzen, so giebt das

$$\left[\begin{array}{c} x + y = a + m + n \\ (x-m)^4 + (y-n)^4 = b \end{array}\right]$$

Am einfachsten wird man daher zunächst

$$(x - m) - (y - n) = z$$

bestimmen, also wegen der 1. Gleichung

$$x - m = \frac{a+z}{2}, \quad y - n = \frac{a-z}{2}$$

in der 2. Gleichung substituiren. — Für die vorgelegte Aufgabe hätte man

$$\begin{array}{c} (x-1) + (y+1) = 3 \\ (x-1) - (y+1) = z \\ \hline x - 1 = \frac{3+z}{2}, \quad y + 1 = \frac{3-z}{2} \end{array} \text{ u. s. w.}$$

335. $\left[\begin{array}{c} x + y = 2 \\ (x+1)^5 + (y-2)^5 = 211 \end{array}\right]$

L. $x = 2,\ -3,\ \frac{1}{2}\left(-1 + 3\sqrt{-3}\right)$

$y = 0,\ \ 5,\ \frac{1}{2}\left(5 - 3\sqrt{-3}\right)$

Auch hier setzt man $(x+1) - (y-2) = z$ und bestimmt zunächst die neue Unbekannte z.

336. $\left[\begin{array}{c} x + y = 4 \\ (x-2)^3 + (y+1)^3 = \frac{18}{(x-2)(y+1)} \end{array}\right]$

L. $x = 4,\ 3,\ \frac{1}{2}\left(7 + \sqrt{5}\right)$

$y = 0,\ 1,\ \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right)$

337. $\left[\begin{array}{c} x + y = a \\ \sqrt[4]{m + x} + \sqrt[4]{n + y} = d \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{16}(d + z)^4 - m, \quad y = \frac{1}{16}(d - z)^4 - n$

$z = \sqrt{2r - 3d^2}, \; r = \sqrt{2(a + m + n + d^4)}$

Der einfachste Weg ist hier, zunächst die Differenz der Wurzelgrössen zu suchen. Man setzt also

$$(1) \qquad \sqrt[4]{m + x} - \sqrt[4]{n + y} = z,$$

hat mithin wegen der 2. Gleichung

$$(2) \qquad \begin{array}{l} \sqrt[4]{m + x} = \frac{d + z}{2} \\ \sqrt[4]{n + y} = \frac{d - z}{2} \end{array}$$

Dies zur 4. Potenz erhoben und addirt, giebt mit Benutzung der 1. Gleichung

$$m + n + a = \tfrac{1}{8}(d^4 + 6d^2z^2 + z^4)$$

Hieraus ergiebt sich z; dann folgen aus (2) die Unbekannten selber, wie angegeben.

338. $\left[\begin{array}{c} x + y = 444 \\ \sqrt[3]{x + 10} + \sqrt[3]{y + 14} = 12 \end{array}\right]$

L. $x = 333, \; 115$

$y = 111, \; 329$

339. $\left[\begin{array}{c} x - y = 1 \\ \sqrt[4]{6 + x} + \sqrt[4]{10 - y} = 3 \end{array}\right]$

L. $x = 10, \; -5, \; \frac{1}{2}(5 - 69\sqrt{-55})$

$y = 9, \; -6, \; \frac{1}{2}(3 - 69\sqrt{-55})$

340. $\left[\begin{array}{c} x - y = 50 \\ \sqrt[5]{143 + x} - \sqrt[5]{y - 18} = 1 \end{array}\right]$

L. $x = 100, \; -175, \; \frac{1}{2}(-75 + 87\sqrt{-3})$

$y = 50, \; -225, \; \frac{1}{2}(-175 + 87\sqrt{-3})$

Die Summe der Wurzelgrössen ist $= z$ zu setzen und zunächst z zu bestimmen. Man findet $z = \pm 5, \; 3\sqrt{-3}$

341. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+y^2}{xy} = a \\ \dfrac{1+x^2y^2}{xy} = b \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1}{4}\left(\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}\right)\left(\sqrt{b+2}-\sqrt{b-2}\right)$

$y = \frac{1}{4}\left(\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}\right)\left(\sqrt{b+2}-\sqrt{b-2}\right)$

Durch corr. Add. erhält man leicht aus den beiden Gleichungen

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}}{\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}} = \frac{(\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2})^2}{4} = \frac{4}{(\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2})^2}$$

$$xy = \frac{\sqrt{b+2}-\sqrt{b-2}}{\sqrt{b+2}+\sqrt{b-2}} = \frac{(\sqrt{b+2}-\sqrt{b-2})^2}{4}$$

Jetzt die geeigneten Werthe multiplicirt u. s. w.

342. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(x+y)^2}{4xy} = a \\ \dfrac{(1+xy)^2}{4xy} = b \end{array}\right]$$

L. $x = \left(\sqrt{a}+\sqrt{a-1}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{b-1}\right)$

$y = \left(\sqrt{a}-\sqrt{a-1}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{b-1}\right)$

343. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{1+xy} = a \\ \dfrac{x-y}{1-xy} = b \end{array}\right]$$

L. $x = \dfrac{1+ab-\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}{a+b}$,

$y = \dfrac{1-ab-\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}{a-b}$

a. Die hier angegebenen Formeln für die Unbekannten erhält man am einfachsten dadurch, dass man die eine Unbekannte eliminirt und die andere sucht. Aus der 1. Gleichung hat man

$$y = \frac{x-a}{ax-1}$$

Dies ist in der 2. Gleichung zu substituiren u. s. w.

b. Einfacher noch ist folgende Lösung. Man hat

(1) $$\left[\begin{array}{l} x+y = a(1+xy) \\ x-y = b(1-xy) \end{array}\right]$$

Die Differenz der Quadrate giebt

$$4xy = a^2(1+xy)^2 - b^2(1-xy)^2$$

$$\frac{1+x^2y^2}{2xy} = \frac{2-a^2-b^2}{a^2-b^2}$$

Hieraus durch corr. Add.

$$\frac{1+xy}{1-xy} = \sqrt{\frac{1-b^2}{1-a^2}}$$

$$xy = \frac{\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-a^2}}$$

Dies benutzt, liefern die Gleichungen (1)

$$(2)\quad x = \frac{a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-a^2}},\quad y = \frac{a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-a^2}}$$

Das sind andere Formeln für die Unbekannten, dem Werthe nach aber von den oben angegebenen nicht verschieden.

c. Die einfachste Auflösung ist, direct corr. Addition anzuwenden. Das giebt

$$\left[\begin{array}{l}\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = \frac{1+a}{1-a}\\ \frac{(1+x)(1-y)}{(1-x)(1+y)} = \frac{1+b}{1-b}\end{array}\right]$$

Die Multiplication und Division dieser Gleichungen liefert

$$\frac{1+x}{1-x} = \sqrt{\frac{(1+a)(1+b)}{(1-a)(1-b)}}$$

$$\frac{1+y}{1-y} = \sqrt{\frac{(1+a)(1-b)}{(1-a)(1+b)}}$$

Also durch abermalige Anwendung der corr. Add.

$$(3)\quad \begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{(1+a)(1+b)}-\sqrt{(1-a)(1-b)}}{\sqrt{(1+a)(1+b)}+\sqrt{(1-a)(1-b)}}\\ y = \frac{\sqrt{(1+a)(1-b)}-\sqrt{(1-a)(1+b)}}{\sqrt{(1+a)(1-b)}+\sqrt{(1-a)(1+b)}}\end{array}$$

Schafft man die Wurzeln aus den Nennern fort, so ergeben sich die zuerst angegebenen Formeln. Macht man gleichnamig, so erscheinen die Formeln in (2).

344. $\left[\begin{array}{l}\frac{x+y}{1+xy} = \frac{2a}{1+a^2}\\ \frac{x-y}{1-xy} = \frac{2b}{1+b^2}\end{array}\right]$ L. $x = \frac{a+b}{1+ab},\ \frac{1+ab}{a+b}$

$y = \frac{a-b}{1-ab},\ \frac{1-ab}{a-b}$

345. $\left[\begin{array}{l} \frac{x+y}{1+xy} = \frac{a-1}{a+1} \\ \frac{x-y}{1-xy} = \frac{b-1}{b+1} \end{array}\right]$ L. $x = \frac{\sqrt{ab}-1}{\sqrt{ab}+1}$, $y = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

346. $\left[\begin{array}{l} \frac{x+y}{1+xy} = \frac{a^2-\alpha^2}{a^2+\alpha^2} \\ \frac{x-y}{1-xy} = \frac{b^2-\beta^2}{b^2+\beta^2} \end{array}\right]$ L. $x = \frac{ab-\alpha\beta}{ab+\alpha\beta}, \frac{ab+\alpha\beta}{ab-\alpha\beta}$, $y = \frac{a\beta-b\alpha}{a\beta+b\alpha}, \frac{a\beta+b\alpha}{a\beta-b\alpha}$

347. $\left[\begin{array}{l} \frac{x+y}{1+xy} = \frac{a}{b+c} \\ \frac{x-y}{1-xy} = \frac{b-c}{a} \end{array}\right]$

L. $x = \frac{2ab-4\Delta}{a^2+b^2-c^2}$, $y = \frac{2ac-4\Delta}{a^2-b^2+c^2}$

$\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

Die den Formeln (3) in 343. entsprechenden würden hier folgende sein:

(1)
$$x = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)} - \sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)}}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)} + \sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)}}$$
$$y = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)} - \sqrt{(-a+b+c)(a+b-c)}}{\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)} + \sqrt{(-a+b+c)(a+b-c)}}$$

Sieht man a, b, c als die Seiten eines Dreiecks an, so folgt nach bekannten trigonometrischen Lehrsätzen aus diesen Formeln

(2)
$$x = \frac{1 \mp \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma}{1 \pm \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma} = \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{4}\pi \mp \tfrac{1}{2}\gamma\right)$$
$$y = \frac{1 \mp \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta}{1 \pm \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta} = \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{4}\pi \mp \tfrac{1}{2}\beta\right),$$

wo β und γ die den Seiten b und c beziehungsweise gegenüberstehenden Winkel sind. — Quadrirt man die Formeln in (1) und radicirt wieder, so ergiebt sich aus der Vergleichung mit (2), dass für jedes Dreieck sein muss

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\gamma\right) = \sqrt{\frac{ab-2\Delta}{ab+2\Delta}}$$
$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\beta\right) = \sqrt{\frac{ac-2\Delta}{ac+2\Delta}}$$

348. $\left[\begin{array}{l} \frac{x+y}{1+xy} = \frac{34}{31} \\ \frac{x-y}{1-xy} = 14 \end{array}\right]$ L. $x = \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$, $y = \frac{5}{8}, \frac{8}{5}$

349. $\left[\begin{array}{l} \frac{x+y}{1-xy} = a \\ \frac{x-y}{1+xy} = b \end{array}\right]$

L. $x = \frac{-1+ab+\sqrt{(1+a^2)\,(1+b^2)}}{a+b}$,

$y = \frac{-1-ab+\sqrt{(1+a^2)\,(1+b^2)}}{a-b}$

Die den Formeln (2) in 343. entsprechenden würden hier folgende sein:

$$x = \frac{a\sqrt{1+b^2}+b\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+a^2}},\quad y = \frac{a\sqrt{1+b^2}-b\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+a^2}}$$

Sollten die Formeln gesucht werden, welche den Formeln (3) in 343. entsprechen, so müsste man das Imaginäre $(i = \sqrt{-1})$ zu Hülfe nehmen. Man hätte die Gleichungen so einzurichten, dass statt x, y, a und b beziehungsweise überall ix, iy, ia und ib stände, und dann ix und iy zu suchen.

350. $\left[\begin{array}{l} \frac{x+y}{1-xy} = \frac{2a}{1-a^2} \\ \frac{x-y}{1+xy} = \frac{2b}{1-b^2} \end{array}\right]$

L. $x = \frac{a+b}{1-ab}, -\frac{1-ab}{a+b}$

$y = \frac{a-b}{1+ab}, -\frac{1+ab}{a-b}$

Am einfachsten löst man hier mit Hülfe der Trigonometrie. Man setzt

$$x = \operatorname{tg}\xi \qquad y = \operatorname{tg}\eta \qquad a = \operatorname{tg}\alpha \qquad b = \operatorname{tg}\beta$$

Dadurch gehen die gegebenen Gleichungen über in

$$\operatorname{tg}(\xi+\eta) = \operatorname{tg} 2\alpha$$
$$\operatorname{tg}(\xi-\eta) = \operatorname{tg} 2\beta$$

Man hat also

$$\xi+\eta = 2\alpha,\ 2\alpha+\pi$$
$$\xi-\eta = 2\beta,\ 2\beta$$

$$\xi = \alpha+\beta,\ \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}\pi$$
$$\eta = \alpha-\beta,\ \alpha-\beta+\tfrac{1}{2}\pi$$

$$x = \operatorname{tg}\xi = \operatorname{tg}(\alpha+\beta),\ -\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$$
$$y = \operatorname{tg}\eta = \operatorname{tg}(\alpha-\beta),\ -\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}$$

Entwickelt man $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ und $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ und führt a und b wieder ein, so erhält man die oben angegebenen Werthe für x und y. — Für die Aufgabe 344. ist dieser Weg nicht gut an-

wendbar, man müsste schon das Imaginäre zu Hülfe nehmen oder hyperbolische Functionen einführen.

351. $\left[\begin{array}{l} \frac{x+y}{1-xy} = \frac{2a\alpha}{a^2-\alpha^2} \\ \frac{x-y}{1+xy} = \frac{2b\beta}{b^2-\beta^2} \end{array}\right]$ L. $x = \frac{b\alpha+a\beta}{ab-\alpha\beta}, \frac{\alpha\beta-ab}{a\beta+b\alpha}$

$y = \frac{b\alpha-a\beta}{ab+\alpha\beta}, \frac{\alpha\beta+ab}{a\beta-b\alpha}$

352. $\left[\begin{array}{l} \frac{x+y}{1-xy} = \frac{a-\alpha}{a+\alpha} \\ \frac{x-y}{1+xy} = \frac{b-\beta}{b+\beta} \end{array}\right]$

L. $x = \frac{a\beta+b\alpha-\sqrt{(a^2+\alpha^2)(b^2+\beta^2)}}{\alpha\beta-ab}$,

$y = \frac{ab+\alpha\beta-\sqrt{(a^2+\alpha^2)(b^2+\beta^2)}}{b\alpha-a\beta}$

Diese Formeln für die Unbekannten entsprechen den in 343. zuerst angegebenen. Denen in 343. (2) entsprechen hier

$$x = \frac{(a-\alpha)\sqrt{b^2+\beta^2}+(b-\beta)\sqrt{a^2+\alpha^2}}{(b+\beta)\sqrt{a^2+\alpha^2}+(a+\alpha)\sqrt{b^2+\beta^2}}$$

$$y = \frac{(a-\alpha)\sqrt{b^2+\beta^2}-(b-\beta)\sqrt{a^2+\alpha^2}}{(b+\beta)\sqrt{a^2+\alpha^2}+(a+\alpha)\sqrt{b^2+\beta^2}}$$

353. $\left[\begin{array}{l} \frac{x+y}{1-xy} = 31 \\ \frac{x-y}{1+xy} = \frac{11}{29} \end{array}\right]$ L. $x = \frac{7}{5}, -\frac{5}{7}$ $y = \frac{2}{3}, -\frac{3}{2}$

354. $\left[\begin{array}{l} \frac{x+y}{1-xy} + \frac{x-y}{1+xy} = a \\ \frac{x+y}{1+xy} + \frac{x-y}{1-xy} = b \end{array}\right]$

L. $x = \frac{-2+\sqrt{4+a^2-b^2}}{a-b}$, $y = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

Man mache gleichnamig, bilde die Summe und die Differenz der Gleichungen, dividire die erstere in die letztere und radicire, so hat man y.

355. $\left[\begin{array}{l} \frac{1-xy}{x+y} + \frac{1+xy}{x-y} = a \\ \frac{1+xy}{x+y} + \frac{1-xy}{x-y} = b \end{array}\right]$

L. $x = \frac{2+\sqrt{4+a^2-b^2}}{a+b}$, $y = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

356. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{1+xy} + \dfrac{1-xy}{x-y} = a \\ \dfrac{x-y}{1-xy} + \dfrac{1+xy}{x+y} = b \end{array}\right]$$

L. $$x = \frac{ab - \sqrt{a^2b^2 - (a+b)^2}}{a+b},$$

$$y = \frac{\sqrt{a^2b^2 - 4ab} - \sqrt{a^2b^2 - (a+b)^2}}{a-b}$$

Der kürzeste Weg ist hier, y zu eliminiren. Man erhält

$$\frac{y^2-1}{y} = \frac{a(1-x^2)}{1+x^2-ax} = -\frac{b(1-x^2)}{1+x^2-bx}$$

$$(a+b)(1+x^2) = 2abx \text{ u. s. w.}$$

Nennt man x_1 und y_1 zwei zusammengehörige Wurzeln dieser Gleichungen, so müssen überhaupt folgende 4 Wurzelpaare vorhanden sein:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_1 & \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_1} \\ y_1 & -\frac{1}{y_1} & \frac{1}{y_1} & -y_1 \end{array}$$

Die gegebenen Gleichungen lassen sich auch so darstellen:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(1+x^2)(1-y^2)}{(1+xy)(x-y)} = a \\ \dfrac{(1+x^2)(1-y^2)}{(1-xy)(x+y)} = b \end{array}\right]$$

357. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{1-xy} + \dfrac{1+xy}{x-y} = a \\ \dfrac{x-y}{1+xy} + \dfrac{1-xy}{x+y} = b \end{array}\right]$$

L. $$x = \frac{\sqrt{a^2b^2 - 4ab} + \sqrt{a^2b^2 + (a-b)^2}}{a+b}.$$

$$y = \frac{-ab + \sqrt{a^2b^2 + (a-b)^2}}{a-b}$$

Am einfachsten wird man hier y suchen, indem man x eliminirt. — Die Gleichungen lassen sich auch so schreiben

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(1+x^2)(1-y^2)}{(1-xy)(x-y)} = a \\ \dfrac{(1+x^2)(1-y^2)}{(1+xy)(x+y)} = b \end{array}\right]$$

358. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{1+xy}{x+y}+\dfrac{x+y}{1+xy}=\dfrac{2a}{\alpha} \\ \dfrac{1-xy}{x-y}+\dfrac{x-y}{1-xy}=\dfrac{2b}{\beta} \end{array}\right]$$

$$\text{L. } x=\frac{\sqrt[4]{(a+\alpha)(b+\beta)}-\sqrt[4]{(a-\alpha)(b-\beta)}}{\sqrt[4]{(a+\alpha)(b+\beta)}+\sqrt[4]{(a-\alpha)(b-\beta)}}$$

$$y=\frac{\sqrt[4]{(a+\alpha)(b-\beta)}-\sqrt[4]{(a-\alpha)(b+\beta)}}{\sqrt[4]{(a+\alpha)(b-\beta)}+\sqrt[4]{(a-\alpha)(b+\beta)}}$$

Denkt man für die in den Gleichungen vorkommenden Quotienten neue Grössen gesetzt, so erhält man mit Anwendung der corr. Add. nach I, 153. b. oder I, 166. leicht

$$\frac{x+y}{1+xy}=\frac{\sqrt{a+\alpha}-\sqrt{a-\alpha}}{\sqrt{a+\alpha}+\sqrt{a-\alpha}}$$

$$\frac{x-y}{1-xy}=\frac{\sqrt{b+\beta}-\sqrt{b-\beta}}{\sqrt{b+\beta}+\sqrt{b-\beta}}$$

Hieraus ergiebt sich nach 343. c. die angegebene Lösung.

359. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{1-xy}{x+y}+\dfrac{x+y}{1-xy}=\dfrac{2}{a} \\ \dfrac{1+xy}{x-y}+\dfrac{x-y}{1+xy}=\dfrac{2}{b} \end{array}\right]$$

$$\text{L. } x=\frac{(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-b})(\sqrt{1+b}-\sqrt{1-a})}{a+b}$$

$$y=\frac{(\sqrt{1+a}-\sqrt{1+b})(\sqrt{1-b}-\sqrt{1-a})}{a-b}$$

Man findet hier ähnlich, wie in der vor. Aufgabe, zunächst

(1) $$\frac{x+y}{1-xy}=\frac{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}} \quad \frac{x-y}{1+xy}=\frac{\sqrt{1+b}-\sqrt{1-b}}{\sqrt{1+b}+\sqrt{1-b}}$$

Diese Gleichungen sind zu behandeln nach 343. b. Man kommt da auf

$$\frac{1+xy}{1-xy}=\frac{\sqrt{1+b}+\sqrt{1-b}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}, \text{ also}$$

$$\frac{1+xy}{2}=\frac{\sqrt{1+b}+\sqrt{1-b}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}+\sqrt{1+b}+\sqrt{1-b}}$$

$$\frac{1-xy}{2}=\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}+\sqrt{1+b}+\sqrt{1-b}}$$

Dies in (1) substituirt, liefert

$$\frac{x+y}{2} = \frac{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}+\sqrt{1+b}+\sqrt{1-b}}$$

$$\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{1+b} - \sqrt{1-b}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}+\sqrt{1+b}+\sqrt{1-b}}$$

Mithin die Unbekannten selber

$$x = \frac{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}+\sqrt{1+b}-\sqrt{1-b}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}+\sqrt{1+b}+\sqrt{1-b}}$$

$$y = \frac{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}-\sqrt{1+b}+\sqrt{1-b}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}+\sqrt{1+b}+\sqrt{1-b}}$$

Schafft man die Wurzelgrössen aus dem Nenner fort, so erhält man die oben angegebenen Formeln. — Die Formel für x unterscheidet sich von der für y nur durch das Zeichen von b. Dies ist auch schon aus der 2. der gegebenen Gleichungen zu ersehen.

360. $$\left[\begin{array}{c} \frac{x+y}{1+xy} = a \\ \frac{x^2+y^2}{1+x^2y^2} = b \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{a+\sqrt{a^2-4p}}{1+\sqrt{1-4p}}$, $y = \frac{a-\sqrt{a^2-4p}}{1+\sqrt{1-4p}}$, $p = \frac{a^2-b}{2(1-b)}$

Man quadrire die 1. Gleichung und setze, um die Aufgabe auf 341. oder 342. zu reduciren,

(1) $$\frac{(1+xy)^2}{xy} = \frac{1}{p}, \text{ also } \frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{a^2}{p}$$

und suche mit Hülfe der 2. Gleichung zunächst p. Aus (1) hat man

$$\frac{1+x^2y^2}{xy} = \frac{1}{p} - 2, \quad \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{a^2}{p} - 2$$

Dies in der 2. Gleichung substituirt, liefert

$$\frac{a^2-2p}{1-2p} = b,$$

woraus p, wie angegeben, folgt. Dann ergiebt sich aus (1) nach 341. und 342.

$$\frac{1+xy}{1-xy} = \frac{1}{\sqrt{1-4p}}, \quad \frac{x+y}{x-y} = \frac{a}{\sqrt{a^2-4p}} \text{ u. s. w.}$$

361. $$\left[\begin{array}{c} \frac{x-y}{1-xy} = \frac{1}{2} \\ \frac{x^2-xy+y^2}{1-xy+x^2y^2} = \frac{49}{241} \end{array}\right]$$

L. $x = 3, \quad 5, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5}$

$y = -5, \quad -3, \quad -\frac{1}{5}, \quad -\frac{1}{3}$

362. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{1+xy} = a \\ \dfrac{x^3+y^3}{(1+xy)^3} = b \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 360., nur $p = \dfrac{a^3-b}{3a}$

363. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{1+xy} = a \\ \dfrac{x^3+y^3}{1+x^3y^3} = b \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 360., nur $p = \dfrac{a^3-b}{3\,(a-b)}$

364. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{1+xy} = a \\ \dfrac{(x+y)^4}{1+x^4y^4} = b \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 360., nur $p = 1 + \sqrt{\dfrac{a^4+b}{2b}}$

365. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{1+xy} = a \\ \dfrac{x^4+y^4}{1+x^4y^4} = b \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 360., nur

$$p = \frac{2\,(a^2-b) + \sqrt{2\,(a^2-b)^2 + 2b\,(a^2-1)^2}}{2\,(1-b)}.$$

Die Gleichung, aus welcher man p findet, ist hier

$$\frac{a^4 - 4a^2p + 2p^2}{1 - 4p + 2p^2} = b$$

Allgemeiner könnte man statt der 2. Gleichung auch setzen

$$\frac{x^4 + mx^3y + nx^2y^2 + mxy^3 + y^4}{1 + m_1xy + n_1x^2y^2 + m_1x^3y^3 + x^4y^4} = b,$$

ohne die Auflösung wesentlich zu erschweren.

366. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{1+xy} = a \\ \dfrac{x^5+y^5}{1+x^5y^5} = b \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 360., nur

$$p = \frac{5\,(a^3-b) + \sqrt{5\,(a^3-b)^2 + 20ab\,(a^2-1)^2}}{10\,(a-b)}$$

Die Gleichung für p wird hier

$$\frac{a^4 - 5a^2p + 5p^2}{1 - 5p + 5p^2} = \frac{b}{a}$$

Dieselbe Auflösung würde auch noch anwendbar sein, wenn statt der 2. Gleichung allgemeiner gesetzt wäre:

$$\frac{x^5 + mx^4y + nx^3y^2 + nx^2y^3 + mxy^4 + y^5}{1 + m_1xy + n_1x^2y^2 + n_1x^3y^3 + m_1x^4y^4 + x^5y^5} = b$$

---

367. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = a \\ \dfrac{(1+x)(1-y)}{(1-x)(1+y)} = b \end{array}\right]$$

L. $x = \dfrac{\sqrt{ab}-1}{\sqrt{ab}+1}$, $y = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Die Multiplication und Division trennt sofort die Unbekannten. — Ueber das Resultat vgl. 345.

368. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = a \\ \dfrac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1-x^2)(1-y^2)} = b \end{array}\right]$$

L. $x = \dfrac{a-1+r_1}{a+1+r}$, $y = \dfrac{a-1-r_1}{a+1+r}$,

$$r = \sqrt{4ab-(a-1)^2},\ r_1 = \sqrt{4ab-(a+1)^2}$$

a. Man setzt

(1) $$\frac{1+x}{1-x} = u,\ \frac{1+y}{1-y} = v,\ \text{also}$$

(2) $$x = \frac{u-1}{u+1},\ y = \frac{v-1}{v+1}$$

Dadurch gehen die Gleichungen über in

$$\left[\begin{array}{c} uv = a \\ \dfrac{u^2+1}{2u} \cdot \dfrac{v^2+1}{2v} = b \end{array}\right]$$

Hieraus ergiebt sich

(3) $$u + v = r \qquad u - v = r_1$$

(4) $$r^2 - r_1{}^2 = 4uv = 4a$$

Dann folgt aus (3) und (4)

$$u = \frac{r+r_1}{2} = \frac{2a}{r-r_1} = \frac{r+r_1+2a}{2+r-r_1}$$

$$v = \frac{r-r_1}{2} = \frac{2a}{r+r_1} = \frac{r-r_1+2a}{2+r+r_1}$$

Die letzten Ausdrücke sind für u und v in (2) zu substituiren, um x und y in der angegebenen Form zu erhalten.

b. Man setzt

$$\frac{1+x}{1-x} = u,$$

also wegen der 1. Gleichung

$$\frac{1+y}{1-y} = \frac{a}{u}$$

Man hat folglich

$$(5) \qquad x = \frac{u-1}{u+1}, \quad y = \frac{a-u}{a+u}$$

Dies ist in der 2. Gleichung zu substituiren. Das giebt

$$\frac{u^2+1}{2u} \cdot \frac{a^2+u^2}{2au} = b$$

$$u^4 + a^2 + (a^2+1)\,u^2 = 4abu^2$$

$$(u^2+a)^2 = [4ab - (a-1)^2]\,u^2$$

$$u^2 + a = u\sqrt{4ab - (a-1)^2}$$

$$u = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{4ab - (a-1)^2} + \sqrt{4ab - (a+1)^2}\right)$$

Damit ist u gefunden. Dann folgen aus (5) die Unbekannten selber.

c. Wendet man auf die gegebene Gleichung corr. Add. an, so erhält man

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{1+xy} = \dfrac{a-1}{a+1} \\ \dfrac{x^2+y^2}{1+x^2y^2} = \dfrac{b-1}{b+1} \end{array}\right]$$

Die Lösung dieser Aufgabe muss also aus der von 360. folgen, wenn man dort setzt

$$\frac{a-1}{a+1} \text{ für } a, \quad \frac{b-1}{b+1} \text{ für } b.$$

369. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = a \\ \dfrac{(1+x^3)(1+y^3)}{(1-x^3)(1-y^3)} = b \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 368., nur

$$r = \sqrt{\frac{b(3a-1)^2 - a(a-3)^2}{3(a-b)}}, \quad r_1 = \sqrt{\frac{b(3a+1)^2 - a(a+3)^2}{3(a-b)}}$$

Die Lösung dieser Aufgabe folgt aus derjenigen von 363., wie 368. aus 360.

370. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = a \\ \dfrac{(1+x)^3(1+y)^3}{(1-x^3)(1-y^3)} = b \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 368., nur

$$r = \sqrt{\frac{16a^3 - 6(3a-1)^2}{3b}}, \quad r_1 = \sqrt{\frac{16a^3 - b(3a+1)^2}{3b}}$$

371. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = a \\ \dfrac{(1+x^4)(1+y^4)}{(1-x^4)(1-y^4)} = b \end{array}\right]$$

L. x und y, wie in 368., nur

$$r = \sqrt{(a+1)^2 - 4p} \qquad r_1 = \sqrt{(a-1)^2 - 4p}$$

$$4p = 4(a^2 - 2ab + 1) + 2\sqrt{2(a^2 - 2ab + 1)^2 + 8a^2(b^2 - 1)}$$

Man verfahre ganz wie in 368. a. Die hier den beiden Radicanden von r und r_1 gemeinsame Grösse $a^2 + 1 - 4p$ wird dann $u^2 + v^2$. — Diese Aufgabe hängt mit 365. zusammen, wie 368. mit 360.

In derselben Weise würde man auch die Auflösung haben bewerkstelligen können, wenn man statt der 2. Gleichung allgemein gehabt hätte

$$\frac{(1 + mx + nx^2 + mx^3 + x^4)(1 + my + ny^2 + my^3 + y^4)}{(1 + m_1x + n_1x^2 + m_1x^3 + x^4)(1 + m_1y + n_1y^2 + m_1y^3 + y^4)} = b$$

372. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = a \\ \dfrac{(1+x^4)(1+y^4)}{(1-x)^4(1-y)^4} = b \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 371., nur

$$4p = 4(a^2 + 1) + 2\sqrt{2(a^2 - 1)^2 + 16b}$$

373. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = a \\ \dfrac{(1+x^5)(1+y^5)}{(1-x^5)(1-y^5)} = b \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 371., nur

$$p = \frac{5(a^3 - 3a^2b + 3a - b) + \sqrt{5(a^3 - 3a^2b + 3a - b)^2 + 80a^2(a^2 - 1)(b^2 - 1)}}{10(a - b)}$$

Diese Gleichung hängt mit 366. zusammen, wie 368. mit 360.

Ohne die Auflösung wesentlich zu erschweren, hätte man statt der 2. Gleichung auch allgemein setzen können

$$\frac{(1 + mx + nx^2 + nx^3 + mx^4 + x^5)(1 + my + ny^2 + ny^3 + my^4 + y^5)}{(1 + m_1x + n_1x^2 + n_1x^3 + m_1x^4 + x^5)(1 + m_1y + n_1y^2 + n_1y^3 + m_1y^4 + y^5)} = b$$

374. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = a \\ \dfrac{(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+y+y^2+y^3+y^4)}{(1-x+x^2-x^3+x^4)(1-y+y^2-y^3+y^4)} = b \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 371., nur

$$p = \frac{5(a^2b - 3a^2 + 3b - 1) + \sqrt{5(a^2b - 3a^2 + 3b - 1)^2 + 80(a^2 - 1)(a^2 - b^2)}}{10(b - 1)}$$

Durch Division der 2. Gleichung in die 1. Gleichung erhält man

$$\frac{(1+x^5)\,(1+y^5)}{(1-x^5)\,(1-y^5)} = \frac{a}{b}$$

Man hat daher in 373. nur $\frac{a}{b}$ statt b zu setzen, um aus der Lösung jener Aufgabe auch die Lösung dieser zu erhalten.

---

375. $$\left[\begin{array}{c} \frac{x+y}{1+xy} = a \\ \frac{(1+x+x^2)\,(1-y^2)}{(1+y+y^2)\,(1-x^2)} = b \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{u-1}{u+1}$, $u = \sqrt{\frac{(1+a)\,(a+3ab+3b-1)}{(1-a)\,(ab+3a+3-b)}}$

$y = \frac{v-1}{v+1}$, $v = \sqrt{\frac{(1+a)\,(ab+3a+3-b)}{(1-a)\,(a+3ab+3b-1)}}$

Man wende auf die 1. Gleichung corr. Add. an u. s. w. — Man kann auch aus der 2. Gleichung zunächst durch corr. Add. entwickeln

$$\frac{x-y}{1-xy} \cdot \frac{1+xy+2\,(x+y)}{2\,(1+xy)+(x+y)} = \frac{b-1}{b+1}$$

Hieraus wegen der 1. Gleichung

$$\frac{x-y}{1-xy} = \frac{(2+a)\,(b-1)}{(1+2a)\,(b+1)}$$

Diese Gleichung ist dann mit der 1. gegebenen Gleichung auf die in 343. c. angegebene Weise zu combiniren.

376. $$\left[\begin{array}{c} \frac{x+y}{1+xy} = a \\ \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n + \left(\frac{1+y}{1-y}\right)^n = b \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 375., nur

$$u = \sqrt[n]{\frac{b+r}{2}},\quad v = \sqrt[n]{\frac{b-r}{2}},\quad r = \sqrt{b^2 - 4\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^n}$$

Man führe u und v ein statt x und y, dann hat man die Aufgabe 137.

377. $$\left[\begin{array}{c} \frac{(1+x+x^2)\,(1+y+y^2)}{(1-x+x^2)\,(1-y+y^2)} = a \\ \frac{(1+x^2)\,(1+y^2)}{(1-x^2)\,(1-y^2)} = b \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{\sqrt{b-1+2p}+\sqrt{b-1-2p}}{\sqrt{b+1+2p}+\sqrt{b+1-2p}}$, $y = \frac{\sqrt{b-1+2p}-\sqrt{b-1-2p}}{\sqrt{b+1+2p}+\sqrt{b+1-2p}}$,

$$p = \frac{-8ab+(a+1)\sqrt{(3a+1)\,(a+3)+9b^2\,(a-1)^2}}{(3a+1)\,(a+3)}$$

a. Man bilde aus den gegebenen Gleichungen durch corr. Add. diese:

$$(1) \qquad \frac{(x+y)(1+xy)}{1+xy+x^2+y^2+x^2y^2} = \frac{a-1}{a+1}$$

$$(2) \qquad \frac{x^2+y^2}{1+x^2y^2} = \frac{b-1}{b+1}$$

Jetzt setze man wegen (2), ähnlich wie in 360., um auf 341. zu kommen:

$$(3) \qquad \frac{1+x^2y^2}{xy} = \frac{b+1}{p}, \text{ also } \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{b-1}{p}$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{(1+xy)^2}{xy} = \frac{b+1+2p}{p}, \text{ also } \frac{1+xy}{\sqrt{xy}} = \sqrt{\frac{b+1+2p}{p}}$$

$$\frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{b-1+2p}{p}, \text{ also } \frac{x+y}{\sqrt{xy}} = \sqrt{\frac{b-1+2p}{p}}$$

Dies in (1) substituirt, ergiebt sich für p die Gleichung

$$\frac{\sqrt{b-1+2p}\cdot\sqrt{b+1+2p}}{p+(b-1)+(b+1)} = \frac{a-1}{a+1}$$

Ist p bestimmt, so ergeben sich die Unbekannten selber aus (3) nach 341.

b. Man kann auch ebenso einfach und allgemeiner folgende Gleichungen lösen:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{(1+mx+x^2)(1+py+y^2)}{(1+m_1x+x^2)(1+p_1y+y^2)} = a \\ \frac{(1+nx+x^2)(1+qy+y^2)}{(1+n_1x+x^2)(1+q_1y+y^2)} = b \end{array}\right]$$

Man setzt

$$(4) \qquad \frac{1+x^2}{x} = u \qquad \frac{1+y^2}{y} = v$$

Dadurch gehen die Gleichungen über in

$$\left[\begin{array}{l} \frac{(u+m)(v+p)}{(u+m_1)(v+p_1)} = a \\ \frac{(u+n)(v+q)}{(u+n_1)(v+q_1)} = b \end{array}\right]$$

Hieraus lassen sich u und v bestimmen. Man eliminirt eine Grösse und sucht die andere. Sind u und v bestimmt, so hat man aus 4) die Unbekannten selber

$$x = \frac{\sqrt{u+2}-\sqrt{u-2}}{\sqrt{u+2}+\sqrt{u-2}} = \frac{u-\sqrt{u^2-4}}{2} \text{ u. s. w.}$$

c. Auch folgende Gleichungen

$$\left[\begin{array}{c} \dfrac{1+\alpha x+x^2}{1+\alpha_1 x+x^2}\cdot\dfrac{1+\alpha y+y^2}{1+\alpha_1 y+y^2}=a \\ \dfrac{1+mx+nx^2+mx^3+x^4}{1+m_1x+n_1x^2+m_1x^3+x^4}\cdot\dfrac{1+my+ny^2+my^3+y^4}{1+m_1y+n_1y^2+m_1y^3+y^4}=b \end{array}\right]$$

würde man ohne Hülfe kubischer Gleichungen lösen können. Am einfachsten setzt man da

$$\frac{1+\alpha x+x^2}{1+\alpha_1 x+x^2}=u,\quad \frac{1+\alpha y+y^2}{1+\alpha_1 y+y^2}=v$$

und bestimmt zunächst u und v.

378. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{1+y+y^2}{1+x+x^2}=a\left(\dfrac{1+y}{1+x}\right)^2 \\ \dfrac{1-y+y^2}{1-x+x^2}=b\left(\dfrac{1-y}{1-x}\right)^2 \end{array}\right]$$

L. $x=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{4u-3a}}{\sqrt{a}+\sqrt{4u-3a}}$, $y=\dfrac{1-\sqrt{4u-3}}{1+\sqrt{4u-3}}$,

$$u=\frac{9(a-b)+8(1-ab)+\sqrt{[9(a-b)+8(1-ab)]^2-288a(1-b)^2}}{24(1-b)}$$

Hier ist gesetzt

$$\frac{(1+x)^2}{1+x+x^2}=\frac{a}{u},\text{ also }\frac{(1+y)^2}{1+y+y^2}=\frac{1}{u}$$

Mithin durch corr. Add.

$$(1)\qquad \frac{1+x}{1-x}=\sqrt{\frac{a}{4u-3a}},\ \frac{1+y}{1-y}=\frac{1}{\sqrt{4u-3}}$$

und folglich x und y wie angegeben. Jetzt ist noch die 2. Gleichung zu benutzen, um u zu bestimmen. Quadrirt man die Gleichung in (1), so erhält man durch corr. Add. leicht

$$\frac{1-x+x^2}{(1-x)^2}=\frac{3(1-x)^2+(1+x)^2}{4(1-x)^2}=\frac{3(4u-3a)+a}{4(4u-3a)}=\frac{3u-2a}{4u-3a}$$

Ebenso

$$\frac{1-y+y^2}{(1-y)^2}=\frac{3u-2}{4u-3}$$

Dies in der 2. Gleichung substituirt, wird die Gleichung für u

$$\frac{4u-3a}{3u-2a}\cdot\frac{3u-2}{4u-3}=b$$

379. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{y(1+x^2)}{x(1+y^2)}=a \\ \dfrac{y(1-x^2)}{x(1-y^2)}=b \end{array}\right]$$

L. $x=\dfrac{a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$, $y=\dfrac{\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$

Man eliminirt hier am einfachsten eine der Unbekannten und sucht die andere. Um x zu eliminiren, schreibt man

$$\frac{1+x^2}{x} = a \cdot \frac{1+y^2}{y}$$

$$\frac{1-x^2}{x} = b \cdot \frac{1-y^2}{y}$$

Die Differenz der Quadrate dieser Gleichungen liefert eine Gleichung für y von der Form I, 276. ff. Ebenso eliminirt man y. Man findet

$$\frac{1+y^2}{1-y^2} = \sqrt{\frac{1-b^2}{1-a^2}},\ \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{a\sqrt{1-b^2}}{b\sqrt{1-a^2}} \text{ u. s. w.}$$

380. $$\left[\begin{array}{l} \frac{y\,(1+x^2)}{x\,(1-y^2)} = a \\ \frac{y^2\,(1+x^4)}{x^2\,(1+y^2)^2} = b \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{a\sqrt{2b+1}+\sqrt{2a^2b-a^2+2b}}{\sqrt{2\,(a^2-b)}},\ y = \frac{\sqrt{2a^2+1}-\sqrt{2b+1}}{\sqrt{2\,(a^2-b)}}$

Man setze wegen der 1. Gleichung

$$\frac{1-y^2}{y} = u, \text{ also } \frac{1+x^2}{x} = a\,u$$

Daraus sind x und y leicht bestimmt. Die 2. Gleichung liefert dann für u

$$a^2u^2 - 2 = b\,(u^2+4)$$

Auch nach 379. kommt man hier leicht zum Ziele.

381. $$\left[\begin{array}{l} \frac{y\,(1+x^2)}{x\,(1+y^2)} = a \\ \frac{y^2\,(1+x^4)}{x^2\,(1+y^4)} = b \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{a\sqrt{1-b}+\sqrt{2b-a^2b-a^2}}{\sqrt{2\,(a^2-b)}},\ y = \frac{\sqrt{1-b}+\sqrt{1-2a^2+b}}{\sqrt{2\,(a^2-b)}}$

382. $$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1+x}{1+y} = a \\ \frac{y}{x} \cdot \frac{1+x+x^2}{1+y+y^2} = b \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{a-\sqrt{a^2-4p}}{a+\sqrt{a^2-4p}},\ y = \frac{1-\sqrt{1-4p}}{1+\sqrt{1-4p}},\ p = \frac{a^2-b}{1-b}$

Man quadrire die 1. Gleichung und setze ähnlich wie in 360.

$$\frac{(1+y)^2}{y} = \frac{1}{p}, \text{ also } \frac{(1+x)^2}{x} = \frac{a^2}{p}$$

383. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{y\,(1+x^2)}{x\,(1+y^2)} = a \\ \dfrac{y^3\,(1+x^6)}{x^3\,(1+y^6)} = b \end{array}\right]$$

L. $x = \dfrac{a\sqrt{3\,(a-b)} + \sqrt{4b - 3a^2b - a^3}}{2\sqrt{a^3-b}}$

$$y = \frac{\sqrt{3\,(a-b)} + \sqrt{b + 3a - 4a^3}}{2\sqrt{a^3-b}}$$

384. $$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{y}{x}} \cdot \dfrac{1+x}{1+y} = a \\ \dfrac{y}{x}\sqrt{\dfrac{y}{x}} \cdot \dfrac{1+x^3}{1+y^3} = b \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 382., nur $p = \dfrac{a^3-b}{3\,(a-b)}$

385. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{y\,(1+x^2)}{x\,(1+y^2)} = a \\ \dfrac{y^4\,(1+x^8)}{x^4\,(1+y^8)} = b \end{array}\right]$$

L. $x = \dfrac{a\sqrt{u} + \sqrt{a^2u-4}}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{u} + \sqrt{u-4}}{2}$

$$u = \frac{2\,(a^2-b) + \sqrt{2\,(a^2-b)^2 + 2b\,(a^2-1)^2}}{a^4-b}$$

Hier ist gesetzt

$$\frac{1+y^2}{y} = \sqrt{u}, \text{ also } \frac{1+x^2}{x} = a\sqrt{u}$$

Hieraus ergeben sich x und y, wie angegeben. Um u zu bestimmen, ist die 2. Gleichung zu benutzen. Man hat

$$\frac{1+y^2}{y} = \sqrt{u}, \ \frac{1+y^4}{y^2} = u-2, \ \frac{1+y^8}{y^4} = (u-2)^2 - 2 \text{ u. s. w.}$$

Allgemeiner hätte man statt der 2. Gleichung auch schreiben können

$$\frac{y^4\,(1+mx^2+nx^4+mx^6+x^8)}{x^4\,(1+py^2+qy^4+py^6+y^8)} = b,$$

ohne dass dadurch die Auflösung wesentlich erschwert worden wäre.

386. $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{y\,(1+x^2)}{x\,(1+y^2)} = a \\ \dfrac{y^5\,(1+x^{10})}{x^5\,(1+y^{10})} = b \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 385., nur

$$u = \frac{5\,(a^3-b) + \sqrt{5\,(a^3-b)^2 + 20ab\,(a^2-1)^2}}{2\,(a^5-b)}$$

Diese Aufgabe folgt aus 366., wenn man dort $\frac{x}{y}$ und xy bezüglich statt x und y setzt. Ebenso folgen 381., 383. und 385. bezüglich aus 360., 363. und 365.

387. $$\left[\begin{array}{c} \dfrac{(1+x)\sqrt{y}}{(1+y)\sqrt{x}} = a \\ \dfrac{(1-x+x^2-x^3+x^4)\,y^2}{(1-y+y^2-y^3+y^4)\,x^2} = b \end{array}\right]$$

L. wie in 382., nur

$$p = \frac{5\,(a^2-b)+\sqrt{5\,(a^2-b)^2+20b\,(a^2-1)^2}}{10\,(1-b)}$$

---

388. $$\left[\begin{array}{c} \dfrac{x+y}{x-y}\cdot\dfrac{xy+1}{xy-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right) \\ \dfrac{x\,(y^2+1)}{y\,(x^2-1)} = \dfrac{a-b}{a+b} \end{array}\right]$$

L. $x = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $y = \dfrac{(a-b)^2+\sqrt{(a-b)^4-4ab\,(a+b)^2}}{2\,(a+b)\sqrt{ab}}$

Man wende auf die 1. Gleichung corr. Add. an, so kann man aus beiden Gleichungen durch Multipl. y leicht eliminiren. — Ist x gefunden, so ist sein Werth in einer der Gleichungen zu substituiren u. s. w.

389. $$\left[\begin{array}{c} \dfrac{x+y}{x-y}\cdot\dfrac{1+xy}{1-xy} = a \\ \dfrac{x\,(1-y^2)}{y\,(1-x^2)} = b \end{array}\right]$$

L. $x = \sqrt{\dfrac{a-1-2r}{a-1+2r}}$, $y = \sqrt{\dfrac{a+1-2br}{a+1+2br}}$, $r = \sqrt{\dfrac{a}{b^2-1}}$

Man wende auf die 1. Gleichung die corr. Add. an, so kann man nach 379. leicht zum Ziele kommen.

390. $$\left[\begin{array}{c} \dfrac{(x+y)\,(1+xy)}{(x-y)\,(1-xy)} = a \\ \dfrac{(x^2+y^2)\,(1+x^2y^2)}{(x^2-y^2)\,(1-x^2y^2)} = b \end{array}\right]$$

L. $x = \dfrac{a-1+\sqrt{4ab-(a+1)^2}}{\sqrt{2\,(a^2-2ab+1)}}$, $y = \dfrac{a+1+\sqrt{4ab-(a-1)^2}}{\sqrt{2\,(a^2-2ab+1)}}$

Durch Anwendung der corr. Add. erhält man

$$\frac{x\,(1+y^2)}{y\,(1+x^2)} = \frac{a+1}{a-1}$$
$$\frac{x^2\,(1+y^4)}{y^2\,(1+x^4)} = \frac{b+1}{b-1}$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von denen in 381. nur durch die Bekannten.

391. $$\left[\begin{array}{r} \frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{1+xy}{1-xy}=a \\ \frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\cdot\frac{1+x^3y^3}{1-x^3y^3}=b \end{array}\right]$$

L. $x=\frac{a-1+\sqrt{(a-1)^2-4p}}{2\sqrt{p}}$, $y=\frac{a+1+\sqrt{(a+1)^2-4p}}{2\sqrt{p}}$

$$p=\frac{a^3-3a^2b+3a-b}{3(a-b)}$$

Nach Anwendung der corr. Addition auf beide Gleichungen setze man

$$\frac{1+x^2}{x}=\frac{a-1}{\sqrt{p}}, \text{ also } \frac{1+y^2}{y}=\frac{a+1}{\sqrt{p}} \text{ u. s. w.}$$

Man hätte auch ebenso gut die Quotienten der 1. Gleichung als neue Unbekannte einführen können.

392. $$\left[\begin{array}{r} \frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{1+xy}{1-xy}=a \\ \frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}\cdot\frac{1+x^4y^4}{1-x^4y^4}=b \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 391., nur p wie in 371.

Die Auflösung würde nicht wesentlich schwieriger werden, wenn man statt der 2. Gleichung allgemeiner gesetzt hätte

$$\frac{x^4+mx^3y+nx^2y^2+mxy^3+y^4}{x^4+m_1x^3y+n_1x^2y^2+m_1xy^3+y^4}\cdot\frac{1+mxy+nx^2y^2+mx^3y^3+x^4y^4}{1+m_1xy+n_1x^2y^2+m_1x^3y^3+x^4y^4}=b$$

Man könnte wie in 391. lösen oder auch

$$\frac{x+y}{x-y}=u \text{ und } \frac{1+xy}{1-xy}=v$$

setzen und zunächst u^2+v^2 bestimmen, da $uv=a$ bekannt ist.

393. $$\left[\begin{array}{r} \frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{1+xy}{1-xy}=a \\ \frac{x^5+y^5}{x^5-y^5}\cdot\frac{1+x^5y^5}{1-x^5y^5}=b \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 391., nur p wie in 373.

394. $$\left[\begin{array}{r} \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^2}\cdot\frac{1+xy+x^2y^2}{(1+xy)^2}=a \\ \frac{x^2-xy+y^2}{(x-y)^2}\cdot\frac{1-xy+x^2y^2}{(1-xy)^2}=b \end{array}\right]$$

L. $x=\frac{\sqrt{u}+\sqrt{4a-3u}}{1+\sqrt{4u-3}}\sqrt{\frac{1-u}{u-a}}$, $y=\frac{\sqrt{u}-\sqrt{4a-3u}}{1+\sqrt{4u-3}}\sqrt{\frac{1-u}{u-a}}$

$$u=\frac{16ab-9a+9b-4+\sqrt{(16ab-9a+9b-4)^2-144a(2b-1)^2}}{12(2b-1)}$$

Hier ist wegen der 1. Gleichung gesetzt

$$(1) \qquad \frac{1+xy+x^2y^2}{(1+xy)^2} = u, \text{ also } \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^2} = \frac{a}{u}$$

Hieraus sind die Ausdrücke der 2. Gleichung mittelst Anwendung der corr. Add. zu entwickeln. Dann wird u gefunden aus

$$\frac{3a-2u}{4a-3u} \cdot \frac{3u-2}{4u-3} = b.$$

Ist u bestimmt, so hat man aus den Gleichungen in (1)

$$xy = \frac{1-\sqrt{4u-3}}{1+\sqrt{4u-3}} = \frac{4(1-u)}{(1+\sqrt{4u-3})^2}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{u}+\sqrt{4a-3u}}{\sqrt{u}-\sqrt{4a-3u}} = \frac{(\sqrt{u}+\sqrt{4a-3u})^2}{4(u-a)} = \frac{4(u-a)}{(\sqrt{u}-\sqrt{4a-3u})^2}$$

Hieraus ergeben sich durch Multiplication und Division der geeigneten Ausdrücke leicht die oben angegebenen Formeln für x und y.

Man hätte auch als neue Unbekannte einführen können

$$(2) \qquad \frac{1+x^2}{x} = u \qquad \frac{1+y^2}{y} = v.$$

Die gegebenen Gleichungen würden dadurch übergehen in

$$(3) \qquad \left[\begin{array}{l} \dfrac{u^2+uv+v^2-3}{(u+v)^2} = a \\ \dfrac{u^2-uv+v^2-3}{(u-v)^2} = b \end{array}\right]$$

Man führt nämlich die Multiplicationen in den Gleichungen aus. Das giebt z. B. in der 1. Gleichung

$$\frac{y^2(1+x^2)^2+x^2(1+y^2)^2+xy(1+x^2)(1+y^2)-3x^2y^2}{(y(1+x^2)+x(1+y^2))^2} = a.$$

Dividirt man Zähler und Nenner durch x^2y^2, so kann man u und v direct einsetzen. — Aus (3) erhält man

$$(4) \quad u = \frac{\sqrt{1-2b}+\sqrt{1-2a}}{\sqrt{\frac{2}{3}(4ab-3a-3b+2)}}, \quad v = \frac{\sqrt{1-2b}-\sqrt{1-2a}}{\sqrt{\frac{2}{3}(4ab-3a-3b+2)}}$$

Dann folgen aus (2) die Unbekannten selber

$$(5) \qquad x = \tfrac{1}{2}u + \sqrt{\tfrac{1}{4}u^2-1}, \; y = \tfrac{1}{2}v + \sqrt{\tfrac{1}{4}v^2-1}$$

Setzt man $a = \frac{49}{81}$ und $b = 9$, so findet man nach der letzten Lösung

$$u = \tfrac{5}{2}, \; 2, \; -2, \; -\tfrac{5}{2}$$
$$v = 2, \; \tfrac{5}{2}, \; -\tfrac{5}{2}, \; -2$$

Darnach wird

$$x = 2,\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -2,\ -\tfrac{1}{2}$$
$$y = 1,\ 1,\ 2,\ \tfrac{1}{2},\ -2,\ -\tfrac{1}{2},\ -1,\ -1$$

Wegen der gleichen Werthe $1 = 1$ und $-1 = -1$ erhält man nur 8 Wurzelpaare, sonst würde man 16 erhalten. Die Elimination der einen Unbekannten muss für die andere eine Gleichung vom 16. Grade liefern.

Statt der gegebenen Gleichungen hätte man auch allgemeiner in derselben Weise lösen können

$$(6) \qquad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+mxy+y^2}{x^2+m_1xy+y^2}\cdot\dfrac{1+pxy+x^2y^2}{1+p_1xy+x^2y^2} = a \\ \dfrac{x^2+nxy+y^2}{x^2+n_1xy+y^2}\cdot\dfrac{1+qxy+x^2y^2}{1+q_1xy+x^2y^2} = b \end{array}\right]$$

Wem die oben gemachte Substitution schwierig erscheint, verfährt ebenso einfach, wenn er setzt

$$(7) \qquad \frac{x^2+y^2}{xy} = u,\ \frac{1+x^2y^2}{xy} = v$$

Dadurch gehen die Gleichungen (6) über in

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{u+m}{u+m_1}\cdot\dfrac{v+p}{v+p_1} = a \\ \dfrac{u+n}{u+n_1}\cdot\dfrac{v+q}{v+q_1} = b \end{array}\right]$$

woraus sich u und v bestimmen lassen. Dann folgen aus (7) nach 341. die Unbekannten selber.

Dritter Theil.

Gleichungen mit drei und vier Unbekannten.

A.

Gleichungen mit drei Unbekannten.

1, $$\left[\begin{array}{l}(y+z)\,(x+y+z)=a\\(x+z)\,(x+y+z)=b\\(x+y)\,(x+y+z)=c\end{array}\right]$$

L. $x=\frac{-a+b+c}{\sqrt{2\,(a+b+c)}}$, $y=\frac{a-b+c}{\sqrt{2\,(a+b+c)}}$, $z=\frac{a+b-c}{\sqrt{2\,(a+b+c)}}$

a. Man suche die Unbekannten, unbekümmert um den in allen Gleichungen vorkommenden gemeinschaftlichen Ausdruck $x+y+z$. Das giebt

$$\begin{array}{ll} & 2x\,(x+y+z)=-a+b+c\\ (1) & 2y\,(x+y+z)=a-b+c\\ & 2z\,(x+y+z)=a+b-c\end{array}$$

Jetzt ist aus den so gefundenen Unbekannten der gemeinsame Ausdruck zu bilden, d. h. hier, man hat die Gleichungen zu addiren und erhält

$$\begin{array}{ll}(2) & 2\,(x+y+z)^2=a+b+c,\\ & \text{also } x+y+z=\tfrac{1}{2}\sqrt{2\,(a+b+c)}\end{array}$$

Dies in (1) substituirt, ergeben sich die Unbekannten selber.

b. Oft ist es einfacher, zuerst den gemeinschaftlichen Ausdruck zu suchen. Hier kann man nur die gegebenen Gleichungen addiren, so ergiebt sich $x+y+z$, wie in (2) angegeben. Dann sind aber auch die Unbekannten selber leicht bestimmt.

c. Der Uebersicht halber führt man eine neue Unbekannte ein und setzt z. B.

$$(3)\qquad x+y+z=\frac{1}{t},$$

so dass die gegebenen Gleichungen übergehen in

$$\begin{array}{l}y+z=at\\x+z=bt\\x+y=ct\end{array}$$

Hieraus folgt

$$(4) \quad x = \tfrac{1}{2}(-a+b+c)\,t \qquad y = \tfrac{1}{2}(a-b+c)\,t \qquad z = \tfrac{1}{2}(a+b-c)\,t$$

Dies ist in (3) zu substituiren. Das giebt

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,t = \frac{1}{t}$$

$$t = \frac{2}{\sqrt{2\,(a+b+c)}}$$

Daher wegen (4) die Unbekannten selber, wie oben angegeben.

2. $\left[\begin{array}{l}(2x-y+z)\,(x+y+z)=9\\(x+2y-z)\,(x+y+z)=1\\(x+y-2z)\,(x+y+z)=4\end{array}\right]$ L. $x = +4_1 \quad -4$, $y = -2_1 \quad +2$, $z = -1_1 \quad +1$

3. $\left[\begin{array}{l}x = a\sqrt{x+y+z}\\y = b\sqrt{x+y+z}\\z = c\sqrt{x+y+z}\end{array}\right]$

L. $x = a\,(a+b+c)$, $y = b\,(a+b+c)$, $z = c\,(a+b+c)$

Dazu kommt nach $x = y = z = 0$

4. $\left[\begin{array}{l}x\,(x+y+z) = a\\y\,(x+y+z) = b\\z\,(x+y+z) = c\end{array}\right]$

L. $x = \frac{a}{\sqrt{a+b+c}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{a+b+c}}$, $z = \frac{c}{\sqrt{a+b+c}}$

5. $\left[\begin{array}{l}x : y : z = a : b : c\\x^2+y^2+z^2 = m^2\end{array}\right]$

L. $x = \frac{am}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $y = \frac{bm}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $z = \frac{cm}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Wegen der 1. Bedingung ist man berechtigt zu nehmen

$$(1) \qquad x = at \qquad y = bt \qquad z = ct;$$

denn man hat

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

kann also diesen Quotienten $= t$ setzen. Dies in der 2. Gleichung substituirt, liefert t, und somit sind dann in (1) auch die Unbekannten selber gefunden. — In Worten würde diese Aufgabe so heissen:

> Welche drei Zahlen verhalten sich wie $a : b : c$, während die Summe ihrer Quadrate $= m^2$ ist.

6. $\left[\begin{array}{c} x : y : z = (b + c) : (a - c) : (a + b) \\ x^2 - y^2 + z^2 = 2m^2 \end{array}\right]$

L. $x = \dfrac{(b+c)\,m}{\sqrt{(a+b)\,(b+c)}}$, $y = \dfrac{(a-c)\,m}{\sqrt{(a+b)\,(b+c)}}$,

$z = \dfrac{(a+b)\,m}{\sqrt{(a+b)\,(b+c)}}$

7. $\left[\begin{array}{c} x : y : z = (-a + b + c) : (a - b + c) : (a + b - c) \\ x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 2m^2 \end{array}\right]$

L. $x = \dfrac{(-a+b+c)\,m}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $y = \dfrac{(a-b+c)\,m}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$,

$z = \dfrac{(a+b-c)\,m}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

8. $\left[\begin{array}{c} (y + z) : (x + z) : (x + y) = a : b : c \\ (y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2 = 1 \end{array}\right]$

L. $x = \dfrac{-a+b+c}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $y = \dfrac{a-b+c}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$,

$z = \dfrac{a+b-c}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

9. $\left[\begin{array}{c} -x + y + z : x - y + z : x + y - z = a : b : c \\ xyz = m^3 \end{array}\right]$

L. $x = \dfrac{(b+c)\,m}{r}$, $y = \dfrac{(a+c)\,m}{r}$, $z = \dfrac{(a+b)\,m}{r}$

$r = \sqrt[3]{(b+c)\,(a+c)\,(a+b)}$

10. $\left[\begin{array}{l} y + z = 2axyz \\ x + z = 2bxyz \\ x + y = 2cxyz \end{array}\right]$

L. $x = \dfrac{-a+b+c}{r}$, $y = \dfrac{a-b+c}{r}$, $z = \dfrac{a+b-c}{r}$

$r = \sqrt{(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}$

Dazu kommt noch $x = y = z = 0$ *)

11. $\left[\begin{array}{l} y + z = a\,(x + y + z)\,xyz \\ x + z = b\,(x + y + z)\,xyz \\ x + y = c\,(x + y + z)\,xyz \end{array}\right]$

L. $x = \dfrac{-a+b+c}{r}$, $y = \dfrac{a-b+c}{r}$, $z = \dfrac{a+b-c}{r}$

$r = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4\,(a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}$

*) Bei manchen folgenden, wie auch schon bei früheren Aufgaben, welche diese gemeinschaftliche und sofort zu erkennende Wurzel 0 haben, ist dieselbe der Kürze wegen nicht angegeben.

Man hat zunächst $x = (-a+b+c)\,t$ u. s. w. Dies ist in einer der Gleichungen einzusetzen, oder besser noch in der Summe derselben

$$2 = (a+b+c)\,xyz$$

Das giebt

$$2 = t^3\,(a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)$$

u. s. w.

„12.“ $\left[\begin{array}{l} \frac{xyz}{y+z} = a \\ \frac{xyz}{x+y} = b \\ \frac{xyz}{x+z} = c \end{array}\right]$

L. $x = (-bc+ac+ab)\sqrt{u}$, $y = (bc-ac+ab)\sqrt{u}$,

$z = (bc+ac-ab)\sqrt{u}$

$$u = \frac{2abc}{(-bc+ac+ab)\,(bc-ac+ab)\,(bc+ac-ab)}$$

Man schreibt die Gleichungen zunächst so:

(1) $$y+z = \frac{1}{a}\,xyz \text{ u. s. w.}$$

Dann verfährt man nach einer der in 1. angegebenen Methoden.

Aus den Gleichungen (1) hat man

$$x = \tfrac{1}{2}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)xyz = \tfrac{1}{2}\,(-bc+ac+ab)\,\frac{xyz}{abc},$$

ist also berechtigt zu setzen

$$x = (-bc+ac+ab)\,t \text{ u. s. w.}$$

13. $\left[\begin{array}{l} \frac{x^3+y^3+z^3}{-x+y+z} = a \\ \frac{x^3+y^3+z^3}{x-y+z} = b \\ \frac{x^3+y^3+z^3}{x+y-z} = c \end{array}\right]$

L. $x = a\,(b+c)\sqrt{u}$, $y = b\,(a+c)\sqrt{u}$, $z = c\,(a+b)\sqrt{u}$

$$u = \frac{2abc}{a^3\,(b+c)^3 + b^3\,(a+c)^3 + c^3\,(a+b)^3}$$

14. $\left[\begin{array}{l} ax = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \\ by = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \\ cz = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{a}\sqrt{a+b+c}$, $y = \frac{1}{b}\sqrt{a+b+c}$, $z = \frac{1}{c}\sqrt{a+b+c}$

15. $\left[\begin{array}{l} x^2yz = a \\ xy^2z = b \\ xyz^2 = c \end{array}\right]$

L. $x = \frac{a}{\sqrt[4]{abc}}$, $y = \frac{b}{\sqrt[4]{abc}}$, $z = \frac{c}{\sqrt[4]{abc}}$

Man sucht zunächst die gemeinschaftliche Grösse xyz. Multiplicirt man die Gleichungen mit einander und zieht die 4. Wurzel, so hat man

$$xyz = \sqrt[4]{abc} \text{ u. s. w.}$$

16. $\left[\begin{array}{l} xy^2z^2 = a \\ x^2yz^2 = b \\ x^2y^2z = c \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{a}\sqrt[5]{a^2b^2c^2}$, $y = \frac{1}{b}\sqrt[5]{a^2b^2c^2}$, $z = \frac{1}{c}\sqrt[5]{a^2b^2c^2}$

Die Multiplication der Gleichungen liefert das Product xyz. Dann hat man weiter

$$x = \frac{1}{a}x^2y^2z^2 \text{ u. s. w.}$$

„17.“ $\left[\begin{array}{l} yz = a \\ xz = b \\ xy = c \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{a}\sqrt{abc}$, $y = \frac{1}{b}\sqrt{abc}$, $z = \frac{1}{c}\sqrt{abc}$

18. $\left[\begin{array}{l} x = ayz \\ y = bxz \\ z = cxy \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{\sqrt{bc}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{ac}}$, $z = \frac{1}{\sqrt{ab}}$

19. $\left[\begin{array}{l} x^3 = ayz \\ y^3 = bxz \\ z^3 = cxy \end{array}\right]$

L. $x = \sqrt[4]{a^2bc}$, $y = \sqrt[4]{ab^2c}$, $z = \sqrt[4]{abc^2}$

„20.“ $\left[\begin{array}{l} x\,(y+z) = a \\ y\,(x+z) = b \\ z\,(x+y) = c \end{array}\right]$

L. $x = \frac{u}{-a+b+c}$, $y = \frac{u}{a-b+c}$, $z = \frac{u}{a+b-c}$

$$u = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}$$

Man sehe zunächst die Producte xy, xz und yz als die Unbekannten an und bestimme diese, d. h. man addire je zwei Gleichungen und ziehe von ihrer Summe die dritte ab. Das giebt

$$yz = \tfrac{1}{2}(-a + b + c) \text{ u. s. w.}$$

Jetzt hat man die Aufgabe 17.

21. $$\left[\begin{array}{l}(x+y)(x+z)=a\\(x+y)(y+z)=b\\(x+z)(y+z)=c\end{array}\right]$$

L. $$x = \frac{-bc+ac+ab}{2\sqrt{abc}},\quad y = \frac{bc-ac+ab}{2\sqrt{abc}},$$

$$z = \frac{bc+ac-ab}{2\sqrt{abc}}$$

Man betrachte hier die Summen $x+y$, $x+z$ und $y+z$ als die zunächst zu bestimmenden Grössen. Dann findet man nach 17.

$$y+z = \frac{bc}{\sqrt{abc}} \text{ u. s. w.}$$

22. $$\left[\begin{array}{l}x(x+y+z)=a-yz\\y(x+y+z)=b-xz\\z(x+y+z)=c-xy\end{array}\right]$$

L. wie in 21. — Diese Gleichungen sind mit den Gleichungen 21. identisch, wie man leicht übersieht, wenn man die Unbekannten alle nach links bringt. Um sie aufzulösen bringt man sie auf die Form in 21. Sonst wird die Auflösung weitläufiger. Man könnte etwa so verfahren. Man schreibt

$$\begin{aligned}x^2 &= a-(xy+xz+yz)\\y^2 &= b-(xy+xz+yz)\\z^2 &= c-(xy+xz+yz)\end{aligned}$$

Setzt man die gemeinschaftliche Grösse

$$(1)\qquad xy+xz+yz = t,$$

so hat man

$$(2)\qquad x = \sqrt{a-t},\ y = \sqrt{b-t},\ z = \sqrt{c-t}.$$

Dies in (1) substituirt, liefert für t die Gleichung

$$\sqrt{(a-t)(b-t)}+\sqrt{(a-t)(c-t)}+\sqrt{(b-t)(c-t)} = t$$

Man findet aus derselben

$$t = a-\frac{(-bc+ac+ab)^2}{4abc} = b-\frac{(bc-ac+ab)^2}{4abc} = c-\frac{(bc+ac-ab)^2}{4abc}$$

Setzt man dies in (2) ein, so erhält man die Unbekannten ebenfalls, wie in 21. angegeben.

23. $$\left[\begin{array}{l}(x+y-z)\,(x-y+z)=a\\(y+z-x)\,(y-z+x)=b\\(z+x-y)\,(z-x+y)=c\end{array}\right]$$

L. $x=\frac{a\,(b+c)}{2\sqrt{abc}}$, $y=\frac{b\,(a+c)}{2\sqrt{abc}}$, $z=\frac{c\,(a+b)}{2\sqrt{abc}}$

Man betrachte die Factoren als die zunächst zu suchenden Grössen. Nach 17. erhält man

$$-x+y+z=\frac{bc}{\sqrt{abc}}$$ u. s. w.

24. $$\left[\begin{array}{l}x^2-(y-z)^2=a\\y^2-(x-z)^2=b\\z^2-(x-y)^2=c\end{array}\right]$$

L. wie in 23. — Diese Gleichungen sind mit den vorigen identisch. Um sie aufzulösen, bringt man sie am besten auf die Form in 23.

25 $$\left[\begin{array}{l}x\,(y+z-x)=a\\y\,(z+x-y)=b\\z\,(x+y-z)=c\end{array}\right]$$

L. $x=\frac{a\,(-a+b+c)}{r}$, $y=\frac{b\,(a-b+c)}{r}$, $z=\frac{c\,(a+b-c)}{r}$

$$r=\sqrt{(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}$$

Man addire je zwei Gleichungen und subtrahire von der Summe die dritte, so kommt man auf Gleichungen von der Form 23. oder 24.

$$x^2-y^2-z^2+2yz=-a+b+c,\text{ d. h.}$$
$$(x-y+z)\,(x+y-z)=-a+b+c\text{ u. s. w.}$$

Oder man setze

(1) $$-x+y+z=x_1 \qquad x-y+z=y_1$$
$$x+y-z=z_1,$$

so gehen die Gleichungen über in

$$\left[\begin{array}{l}(y_1+z_1)\,x_1=2a\\(x_1+z_1)\,y_1=2b\\(x_1+y_1)\,z_1=2c\end{array}\right]$$

Aus diesen Gleichungen sind nach 20. leicht die Unbekannten zu bestimmen. Dann liefern die Gleichungen (1) die Unbekannten selber.

26. $$\left[\begin{array}{l}(y+z)\,(2x+y+z)=b+c\\(x+z)\,(x+2y+z)=a+c\\(x+y)\,(x+y+2z)=a+b\end{array}\right]$$

L. wie in 21. — Man setze

$$y+z=x_1 \qquad x+z=y_1 \qquad x+y=z_1$$

so nehmen diese Gleichungen die Form 20. an. — Addirt man je zwei Gleichungen und subtrahirt davon die dritte, so erhält man die Gleichungen 21. oder 22.

27. $$\left[\begin{array}{l}x\,(y+z)=(b+c)\,(x+y+z)\\y\,(x+z)=(a+c)\,(x+y+z)\\z\,(x+y)=(a+b)\,(x+y+z)\end{array}\right]$$

L. $x=\frac{1}{a}\,(bc+ac+ab)$, $y=\frac{1}{b}\,(bc+ac+ab)$,

$z=\frac{1}{c}\,(bc+ac+ab)$; dazu noch

$$x=y=z=0$$

Man löse, unbekümmert um die gemeinschaftliche Grösse $x+y+z$, wie in 20., so erhält man zunächst

(1) $$yz=a\,(x+y+z)$$ u. s. w.

Dies schreibt man am besten so

$$x=\frac{1}{a}\cdot\frac{xyz}{x+y+z}$$

Man darf also setzen

(2) $$x=\frac{t}{a},\quad y=\frac{t}{b},\quad z=\frac{t}{c}.$$

Dann ist noch t durch Substitution von (2) in einer der gegebenen Gleichungen oder in (1) zu bestimmen.

28. $$\left[\begin{array}{l}x=a^2\,(x+y+z)\,yz\\y=b^2\,(x+y+z)\,xz\\z=c^2\,(x+y+z)\,xy\end{array}\right]$$

L. $x=\frac{a}{r}$, $y=\frac{b}{r}$, $z=\frac{c}{r}$

$$r=\sqrt{abc\,(a+b+c)}$$

Dazu kommt noch $x=y=z=0$. Die Bekannten a, b, c können beliebige Zeichen haben. Das giebt im Ganzen, die Wurzel 0 mit eingerechnet, 9 Lösungen. — Man multiplicirt die

Gleichungen der Reihe nach mit x, y, z und zieht die Wurzel, so hat man zu lösen

$$x = at \qquad y = bt \qquad z = ct$$
$$t = \sqrt{(x + y + z)\, xyz}$$

29.
$$\left[\begin{array}{l} \frac{y}{z} + \frac{z}{y} = \frac{a}{x} \\ \frac{x}{z} + \frac{z}{x} = \frac{b}{y} \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{c}{z} \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1}{2}\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)}$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{(a+b-c)(-a+b+c)}$
$z = \frac{1}{2}\sqrt{(a-b+c)(-a+b+c)}$

Man schreibe die Gleichungen so:

$$x^2 (y^2 + z^2) = a\, xyz \text{ u. s. w.}$$

Jetzt ähnlich, wie in 20., verfahren, liefert

$$y^2 z^2 = \tfrac{1}{2}(-a+b+c)\, xyz, \text{ also}$$
$$(1) \qquad 2\, xyz = (-a+b+c)\, x^2 \text{ u. s. w.}$$

Diese Gleichungen multiplicirt, giebt

$$xyz = \tfrac{1}{8}(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

Dann folgen aus (1) die Unbekannten selber.

30.
$$\left[\begin{array}{l} \frac{y+z}{y^2 z^2} = ax \\ \frac{x+z}{x^2 z^2} = by \\ \frac{x+y}{x^2 y^2} = cz \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{r}{-a+b+c}$, $y = \frac{r}{a-b+c}$, $z = \frac{r}{a+b-c}$
$r = \sqrt[4]{2\,(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

Man schreibt die Gleichungen in dieser Form

$$x(y+z) = a\, x^2 y^2 z^2 \text{ u. s. w.}$$

Dann folgt nach 20.

$$yz = \tfrac{1}{2}(-a+b+c)\, x^2 y^2 z^2 \text{ u. s. w.}$$

Die Multiplication liefert $xyz = \frac{2}{r}$ u. s. w.

31. $$\left[\begin{array}{l} x = a\,(x+y+z)\sqrt[3]{xyz} \\ y = b\,(x+y+z)\sqrt[3]{xyz} \\ z = c\,(x+y+z)\sqrt[3]{xyz} \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{a}{r},\ y = \frac{b}{r},\ z = \frac{c}{r}$

$$r = (a+b+c)\sqrt[3]{abc}$$

32. $$\left[\begin{array}{c} (b-c)\,x + (c-a)\,y + (a-b)\,z = 0 \\ a\,x + (a-c)\,y - c\,z = 0 \\ (x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2 = 4\,(a^2+b^2+c^2) \end{array}\right]$$

L. $x = \pm\,(-a+b+c),\ y = \pm\,(a-b+c),$
$z = \pm\,(a+b-c)$

Aus den beiden ersten Gleichungen lässt sich das Verhältniss der Unbekannten bestimmen. Man erhält

$$x : y : z = (-a+b+c) : (a-b+c) : (a+b-c)$$

Jetzt weiter wie in 5.

33. $$\left[\begin{array}{c} (b+c)\,x + (c-a)\,y - (a+b)\,z = 0 \\ b\,x + (c-a)\,y - b\,z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 \end{array}\right]$$

L. $x = \pm\,a,\quad y = \pm\,b,\quad z = \pm\,c$

34. $$\left[\begin{array}{l} (2a+b+c)\,x - (a+2b+c)\,y + (a-b)\,z = 0 \\ (2a+b+c)\,x + (a-c)\,y - (a+b+2c)\,z = 0 \\ \frac{a\,x^2}{(b+c)^2} + \frac{b\,y^2}{(a+c)^2} + \frac{c\,z^2}{(a+b)^2} = 1 \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{b+c}{r},\ y = \frac{a+c}{r},\ z = \frac{a+b}{r}$

$$r = \sqrt{a+b+c}$$

35. $$\left[\begin{array}{l} x\left(1 - \frac{x}{a^2}\right) + y + z = 0 \\ x + y\left(1 - \frac{y}{b^2}\right) + z = 0 \\ x + y + z\left(1 - \frac{z}{c^2}\right) = 0 \end{array}\right]$$

L. $x = a\,(a+b+c),\ y = b\,(a+b+c),\ z = c\,(a+b+c)$

Dazu kommt noch $x = y = z = 0$. — Ausserdem können die Bekannten mit ganz beliebigen Zeichen genommen werden. Das giebt im Ganzen 5 Lösungen.

36. $$\left[\begin{array}{l} y + z = ax + xyz \\ x + z = by + xyz \\ x + y = cz + xyz \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{r}{a+1}$, $y = \frac{r}{b+1}$, $z = \frac{r}{c+1}$

$$r = \sqrt{a + b + c + 2 - abc}$$

Aus der Differenz je zweier Gleichungen folgt zunächst

$$x : y : z = \frac{1}{a+1} : \frac{1}{b+1} : \frac{1}{c+1}$$

37. $$\left[\begin{array}{l} \frac{yz}{y+z} = \frac{xyz}{b+c} - x \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{xyz}{a+c} - y \\ \frac{xy}{x+y} = \frac{xyz}{a+b} - z \end{array}\right]$$

L. $x = ar$, $y = br$, $z = cr$

$$r = \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Man kann die Gleichungen zunächst so schreiben:

$$y + z = (b + c)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \text{ u. s. w.}$$

Dann ergiebt sich aus denselben

$$x = a\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \text{ u. s. w.}$$

38. $$\left[\begin{array}{c} (2x + y - 4z)(x + y + z) = 24 \\ (x - 2y + 2z)(x + y + z) = 6 \\ (-2x + 3y + 5z)(x + y + z) = 30 \end{array}\right]$$

L. $x = \pm 3$, $y = \pm 2$, $z = \pm 1$

39. $$\left[\begin{array}{l} (x + 2y - 3z)(x + y + z) - 2(xy + xz + yz) = -12 \\ (2x - 3y + z)(x + y + z) + (xy + xz + yz) = 61 \\ (3x - y + 2z)(x + y + z) - 5(xy + xz + yz) = 5 \end{array}\right]$$

L. $x = \pm 5$, $y = \pm 3$, $z = \pm 2$

Dazu noch die imaginären Wurzeln

$$x = \mp \frac{63}{\sqrt{-1079}}, \quad y = \pm \frac{135}{\sqrt{-1079}}, \quad z = \pm \frac{58}{\sqrt{-1079}}$$

Man führe neue Unbekannte für die gemeinschaftlichen Grössen ein, und setze also

(1) $\qquad x + y + z = t \qquad xy + xz + yz = u$

und löse, unbekümmert um t und u, die Gleichungen auf.

Das giebt

$$(2)\qquad \left[\begin{array}{rl} 7xt = & 9 + 11u \\ 7yt = -162 & + 12u \\ 7zt = -77 & + 7u \end{array}\right]$$

Dies ist für (1) zu benutzen, um t und u zu bestimmen. Erstens addirt man also die drei Gleichungen, zweitens multiplicirt man je zwei derselben mit einander und addirt die drei Producte. So erhält man aus (1)

$$(3)\qquad \left[\begin{array}{c} 7t^2 = -230 + 30u \\ 49ut^2 = 10323 - 4516u + 293u^2 \end{array}\right]$$

Hieraus sind u und t zu bestimmen. Es wird

$$u = 31,\ \frac{333}{83} \qquad t = \pm 10,\ \pm 10\sqrt{-\frac{13}{83}}$$

Dann ergeben sich aus (2) die Unbekannten selber.

Anstatt $xy + xz + yz$ hätte auch in den Gleichungen ebenso gut $x^2 + y^2 + z^2$ stehen können, ohne dass dadurch die Auflösung wesentlich geändert zu werden brauchte. Denn die Gleichungen

$$(4)\quad (ax + by + cz)(x + y + z) + n(xy + xz + yz) = A \text{ und}$$

$$(5)\quad (a_1x + b_1y + c_1z)(x + y + z) + n_1(x^2 + y^2 + z^2) = A_1$$

lassen sich auf einander reduciren. Es ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz)$$

Dies in (5) substituirt, giebt

$$[(a_1+n_1)x+(b_1+n_1)y+(c_1+n_1)z](x+y+z)-2n_1(xy+xz+yz)=A_1,$$

eine Gleichung, welche in ihrer Form von der Gleichung (4) nicht verschieden ist.

Bisweilen kommen Aufgaben vor, welche sich auf die obige (39.) reduciren lassen. Von dieser Art sind die folgenden Aufgaben.

Die Zahl der Unbekannten ist hier gleichgültig und es kann t ein ganz beliebiger homogener Ausdruck des 1. Grades von den Unbekannten und u einer dessgleichen vom 2. Grade sein. Die Auflösung bleibt immer dieselbe.

40. $$\left[\begin{array}{l} x^2 - yz = a \\ y^2 - xz = b \\ z^2 - xy = c \end{array}\right]$$

L. $$x = \frac{a^2 - bc}{r},\ y = \frac{b^2 - ac}{r},\ z = \frac{c^2 - ab}{r}$$

$$r = \sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}$$

Nach der zu 39. gemachten Bemerkung, um diese Aufgabe auf die Form der vorigen zu bringen, setzt man hier versuchsweise

(1) $x^2 - yz = (\alpha x + \beta y + \gamma z)(x + y + z) + n(xy + xz + yz)$

Dann muss sein, wie aus der Vergleichung der Coefficienten auf beiden Seiten hervorgeht,

(2)
$$\begin{array}{lll} \alpha = 1 & \beta = 0 & \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + n = 0 & \alpha + \gamma + n = 0 & \beta + \gamma + n = -1 \end{array}$$

Durch die ersten 3 Gleichungen werden auch die 3 letzten erfüllt, wenn man $n = -1$ setzt. Man hat hier 6 Gleichungen und nur 4 zu bestimmende Grössen. Daher wird man nur in besonderen Fällen diesen 6 Gleichungen zugleich genügen können, und nur dann ist die Reduction eines gegebenen Systems von Gleichungen auf ein solches, wie es in 39. vorliegt, möglich. — Statt der oben gegebenen Gleichungen hat man daher in Folge der Bestimmung der Coefficienten der Gleichung (1) aus den Gleichungen (2) zu setzen

$$x(x + y + z) - (xy + xz + yz) = a \text{ u. s. w.}$$

Haben demnach t und u dieselbe Bedeutung, wie in 39., ist also

(3) $x + y + z = t \qquad xy + xz + yz = u,$

so lassen sich die gegebenen Gleichungen auch so schreiben

$$\left[\begin{array}{l} xt - u = a \\ yt - u = b \\ zt - u = c \end{array}\right]$$

Man erhält hieraus wegen (3) zunächst

$$u = -\frac{ab + ac + bc}{a + b + c}, \quad t = \frac{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}}{a + b + c} \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichungen

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + yz = a \\ y^2 + xz = b \\ z^2 + xy = c \end{array}\right]$$

lassen sich nicht auf diesem Wege lösen, sondern führen auf eine vollständige Gleichung des 4. Grades*), d. h. sind nur mit Hülfe einer kubischen Gleichung lösbar.

---

*) Um diese Gleichung des 4. Grades auf eine einfache Weise zu erhalten, nehme man $x^2 + y^2 + z^2$ als neue Unbekannte, setze also

(α) $\qquad x^2 + y^2 + z^2 = u$

41. $$\left[\begin{array}{l} y^2 + z^2 - x\,(y + z) = a \\ x^2 + z^2 - y\,(x + z) = b \\ x^2 + y^2 - z\,(x + y) = c \end{array}\right]$$

L. $$x = \frac{b^2 + c^2 - a\,(b+c)}{r},\quad y = \frac{a^2 + c^2 - b\,(a+c)}{r},$$

$$z = \frac{a^2 + b^2 - c\,(a+b)}{r}$$

$$r = \sqrt{2\,(a^3 + b^3 + c^3 - 3\,a\,b\,c)}$$

Nach der in 39. und 40. erörterten Methode kommt man leicht darauf, die Gleichungen so zu schreiben:

$$(y + z)\,(x + y + z) - 2\,(xy + xz + yz) = a$$

u. s. w.

Noch einfacher werden die Gleichungen, wenn man $x^2 + y^2 + z^2$ einführt. Dann nehmen sie diese Form an

$$\left[\begin{array}{l} -x\,(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2 = a \\ -y\,(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2 = b \\ -z\,(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2 = c \end{array}\right]$$

Darin ist wie oben

$$x + y + z = t \text{ und } x^2 + y^2 + z^2 = u$$

zu setzen. Dann findet man zunächst

$$u = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c},\quad t = \frac{\sqrt{2\,(a^3 + b^3 + c^3 - 3\,a\,b\,c)}}{a + b + c}$$

42. $$\left[\begin{array}{l} x^2 + (y - z)^2 = a \\ y^2 + (x - z)^2 = b \\ z^2 + (x - y)^2 = c \end{array}\right]$$

L. $$x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a - b + c} + \sqrt{a + b - c}\right)$$

$$y = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{b + a - c} + \sqrt{b - a + c}\right)$$

$$z = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{c + a - b} + \sqrt{c - a + b}\right)$$

Dann kann man die Gleichungen auch so schreiben

$$(x + y - z)\,(x - y + z) = 2a - u$$

$$(x + y - z)\,(-x + y + z) = 2b - u$$

$$(x - y + z)\,(-x + y + z) = 2c - u$$

Hieraus lässt sich nach 23. x, y und z bestimmen, unbekümmert um u. Das ist in (α) zu substituiren, so erhält man für u eine Gleichung des 4. Grades.

Diese Gleichungen lassen sich nicht in obiger Weise behandeln. Ein Versuch, sie auf die oben angegebenen Formen zu bringen, zeigt dies leicht. Man kann sie aber so schreiben:

$$(x + y - z)^2 + (x - y + z)^2 = 2a \text{ u. s. w.}$$

Sieht man dann $x + y - z$, $x - y + z$, $-x + y + z$ als die zu suchenden Grössen an, so erhält man

$$-x + y + z = \sqrt{-a + b + c} \text{ u. s. w.}$$

43. $$\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x(y + z) + yz = a \\ y^2 + 2y(x + z) + xz = b \\ z^2 + 2z(x + y) + xy = c \end{array}\right]$$

L. $$x = \frac{3a - b - c - r}{2\sqrt{a + b + c - 3r}},\quad y = \frac{3b - a - c - r}{2\sqrt{a + b + c - 3r}},$$

$$z = \frac{3c - a - b - r}{2\sqrt{a + b + c - 3r}}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - \tfrac{2}{3}(ab + ac + bc)}$$

Man kann die Gleichungen so darstellen:

$$x(x + y + z) + (xy + xz + yz) = a \text{ u. s. w.}$$

und findet dann zunächst bei der Bezeichnung in 40. (3)

$$u = \frac{a + b + c + r}{4},\quad t = \tfrac{1}{2}\sqrt{a + b + c - 3r}$$

44. $$\left[\begin{array}{r} -x^2 + y^2 + z^2 + yz - xz - xy = a \\ x^2 - y^2 + z^2 - yz + xz - xy = b \\ x^2 + y^2 - z^2 - yz - xz + xy = c \end{array}\right]$$

L. $$x = \frac{-a^2 + b^2 + c^2 + bc - ac - ab}{2\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}}$$

$$y = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - bc + ac - ab}{2\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}}$$

$$z = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - bc - ac + ab}{2\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}}$$

Durch Addition je zweier Gleichungen kommt man auf das System 40., nämlich

$$x^2 - yz = \tfrac{1}{2}(b + c) \text{ u. s. w.}$$

Will man direct lösen, so hat man nach 40. (3)

$$(-x + y + z)\,t - u = a$$
$$(x - y + z)\,t - u = b$$
$$(x + y - z)\,t - u = c$$

Daraus zunächst

$$2xt = b + c + 2u \text{ u. s. w.}$$

Man findet dann

$$u = -\frac{(a+b+c)^2 + bc + ac + ab}{4(a+b+c)},\quad t = \frac{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}{2(a+b+c)}$$

45. $$\left[\begin{array}{l} 2x^2 + y^2 + z^2 - yz = 9 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 - xz = 6 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 - xy = 3 \end{array}\right]$$

L. $x = \pm 2,\ y = \pm 1,\ z = 0$

Man schreibe die Gleichungen so:

$$(2x + y + z)(x + y + z) - 3(xy + xz + yz) = 9$$

u. s. w.

46. $$\left[\begin{array}{l} 2x^2 + x(y+z) - yz = a \\ 2y^2 + y(x+z) - xz = b \\ 2z^2 + z(x+y) - xy = c \end{array}\right]$$

L. $x = \dfrac{3a+r}{3\sqrt{2(a+b+c+r)}},\ y = \dfrac{3b+r}{3\sqrt{2(a+b+c+r)}},$

$$z = \frac{3c+r}{3\sqrt{2(a+b+c+r)}}$$

$$r = \sqrt{3(ab + ac + bc)}$$

47. $$\left[\begin{array}{l} y^2 + z^2 + yz = a^2 \\ x^2 + z^2 + xz = b^2 \\ x^2 + y^2 + xy = c^2 \end{array}\right]$$

L. $x = \dfrac{3(-a^2+b^2+c^2)+r}{3\sqrt{2(a^2+b^2+c^2+r)}},\ y = \dfrac{3(a^2-b^2+c^2)+r}{3\sqrt{2(a^2+b^2+c^2+r)}},$

$$z = \frac{3(a^2+b^2-c^2)+r}{3\sqrt{2(a^2+b^2+c^2+r)}}$$

$$r = \sqrt{3(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

Man hat hier zunächst

$$(y + z)(x + y + z) - (xy + xz + yz) = a^2 \text{ u. s. w,}$$

Das giebt also nach den früheren Bezeichnungen

$$2xt = (-a^2 + b^2 + c^2) + u$$
$$2yt = (a^2 - b^2 + c^2) + u$$
$$2zt = (a^2 + b^2 - c^2) + u$$

Die Gleichungen für t und u werden hier:

$$\left[\begin{array}{c} 2t^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 3u \\ 4ut^2 = \frac{1}{3}r^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)\, u + 3u^2 \end{array}\right]^{*)}$$

Hieraus findet man

$$u = \tfrac{1}{3}r \qquad t = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2 + r)}$$

Diese Aufgabe lehrt, in einem Dreiecke mit den Seiten a, b, c die Linien x, y, z bestimmen, welche von den Ecken desselben nach einem Punkte gezogen sind, in welchem sie sich unter gleichen Winkeln, d. h. unter Winkeln von 120^0 schneiden, oder so schneiden, dass die Summe der gesuchten Linien, d. h.

$$x + y + z = t$$

ein Minimum wird**). — Führt man den Flächeninhalt des betreffenden Dreiecks Δ ein, so wird

$$r = 4\Delta\sqrt{3}$$

und das Minimum

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2) + 8\Delta\sqrt{3}}$$

---

48. $\left[\begin{array}{c} x^2 + y^2 = au \\ x + y = bu \\ x - y = cu \end{array}\right]$

L. $x = \dfrac{a(b+c)}{b^2+c^2}$, $y = \dfrac{a(b-c)}{b^2+c^2}$, $u = \dfrac{2a}{b^2+c^2}$

Dazu kommt noch $x = y = u = 0$. — Man bestimme zunächst u, indem man x und y eliminirt.

49. $\left[\begin{array}{c} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{2a}{u^2} \\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{2b}{u^2} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{c} \end{array}\right]$

L. $x = c\left(1 + \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\right)$, $y = c\left(1 + \sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}\right)$,

$$u = c\left(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}\right)$$

---

*) Es ist nämlich

$$(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)+(b^2+a^2-c^2)(b^2-a^2+c^2)+(c^2+a^2-b^2)(c^2-a^2+b^2)$$
$$= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$$
$$= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

**) Vgl. Sohnke, Aufgaben zur Differenzial- und Integralrechnung.

50. $$\left[\begin{array}{c} x^2 - y^2 = au \\ x + y = bu \\ x - y = cu \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{a(b+c)}{2bc}$, $y = \frac{a(b-c)}{2bc}$, $u = \frac{a}{bc}$

Dazu kommt noch $x = y = u = 0$.

„51“. $$\left[\begin{array}{c} xy = u^2 \\ x + y + u = 7 \\ x^2 + y^2 + u^2 = 21 \end{array}\right]$$ L. $x = 4,\ 1$ $y = 1,\ 4$ $u = 2,\ 2$

„52“. $$\left[\begin{array}{c} x : y = y : z \\ x + y + z = a \\ xyz = n^3 \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{a - n + r}{2}$, $y = n$, $z = \frac{a - n - r}{2}$

$r = \sqrt{(a+n)(a-3n)}$

Die imaginären Werthe von $\sqrt[3]{n^3}$ sind nicht mitgerechnet. Dasselbe gilt bei der folgenden Aufgabe.

53. $$\left[\begin{array}{c} x : y = y : z \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ xyz = n^3 \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + n^2} + \sqrt{a^2 - 3n^2}\right)$, $y = n$,

$z = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + n^2} - \sqrt{a^2 - 3n^2}\right)$

54. $$\left[\begin{array}{c} x + y + z = 21 \\ (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 = 126 \\ x^2 = yz \end{array}\right]$$

L. $x = 6,\ 6$ $y = 12,\ 3$ $z = 3,\ 12$

55. $$\left[\begin{array}{c} xy = \frac{z-1}{z+1} \\ (x-y)(z+1) = 2a \\ (x^2 - y^2)(z+1)^2 = 4bz \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{a(b+1) - \sqrt{(a^2 - b^2)(1 - a^2)}}{a^2 + b}$

$y = \frac{a(b-1) + \sqrt{(a^2 - b^2)(1 - a^2)}}{a^2 - b}$

$z = \frac{a}{a^2 - b^2}\sqrt{(a^2 - b^2)(1 - a^2)}$

Man bestimme zunächst z, indem man x und y eliminirt. Dividirt man die 2. Gleichung in die 3., so giebt das

$$(x + y)(z + 1) = \frac{2bz}{a}$$

Zwischen dieser und der 2. Gleichung ist die Differenz der Quadrate zu bilden, so giebt das mit Benutzung der 1. Gleichung

$$z^2 - 1 = \frac{b^2 z^2}{a^2} - a^2$$

56. $\left[\begin{array}{c} x + y = au \\ x^3 + y^3 = bu^3 \\ x^2 + y^2 + u^2 = m^2 \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{2} u (a + r)$, $y = \frac{1}{2} u (a - r)$

$$u = \frac{m\sqrt{3a}}{\sqrt{a^3 + 3a + 2b}}, \quad r = \sqrt{\frac{4b - a^3}{3a}}$$

Man eliminire entweder x und y und suche zuerst u, oder man setze

$$x - y = tu, \text{ also}$$

$$x = \frac{1}{2}(a + t)u \qquad y = \frac{1}{2}(a - t)u$$

und bestimme zunächst $t = r$ und dann u.

57. $\left[\begin{array}{c} x + y = au \\ x^4 + y^4 = bu^3 \\ x^2 + y^2 = cu^2 \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{2} u \left(a + \sqrt{2c - a^2}\right)$, $y = \frac{1}{2} u \left(a - \sqrt{2c - a^2}\right)$

$$u = \frac{2b}{c^2 + 2a^2 c - a^4}$$

58. $\left[\begin{array}{c} x + y = au \\ x^2 + y^2 = bu \\ x^3 + y^3 = cu^2 \end{array}\right]$

L. $x = \frac{3ab - 2c + r}{2a^2}$, $y = \frac{3ab - 2c - r}{2a^2}$, $u = \frac{3ab - 2c}{a^3}$

$$r = \sqrt{(3ab - 2c)(2c - ab)}$$

59. $\left[\begin{array}{c} x + y = au \\ x^2 + y^2 = bu^2 \\ xyu = m^3 \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{2} u \left(a + \sqrt{2b - a^2}\right)$, $y = \frac{1}{2} u \left(a - \sqrt{2b - a^2}\right)$,

$$u = \frac{2m}{\sqrt[3]{4(a^2 - b)}}$$

60. $$\left[\begin{array}{c} x + y = a u \\ x^2 + y^2 = b u^2 \\ x^5 + y^5 = m^4 u \end{array}\right]$$

L. x und y wie in 59., nur $u = \dfrac{2m}{\sqrt[4]{4a(5b^2 - a^4)}}$

61. $$\left[\begin{array}{c} x + y = 2 a u \\ x^2 + y^2 = 2 b u^2 \\ x^n + y^n + u^n = c^n \end{array}\right]$$

L. $x = (a + r)\, u,\ y = (a - r)\, u,\ r = \sqrt{b - a^2}$

$$u = \frac{c}{\sqrt[n]{(a+r)^n + (a-r)^n + 1}}$$

62. $$\left[\begin{array}{c} x + y = a u \\ x^4 + y^4 = b^3 u \\ x y = c u^2 \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1}{2} u \left(a + \sqrt{a^2 - 4c}\right),\ y = \frac{1}{2} u \left(a - \sqrt{a^2 - 4c}\right)$

$$u = \frac{b}{\sqrt[3]{a^4 - 4a^2 c + 2c^2}}$$

63. $$\left[\begin{array}{c} x + y = a u \\ x^2 + y^2 = \dfrac{b}{u} \\ x^3 + y^3 = c \end{array}\right]$$

L. $x = \dfrac{\sqrt{3ab - 2c} + \sqrt{2c - ab}}{2\sqrt[6]{3ab - 2c}},\ y = \dfrac{\sqrt{3ab - 2c} - \sqrt{2c - ab}}{2\sqrt[6]{3ab - 2c}}$

$$u = \frac{1}{a}\sqrt[3]{3ab - 2c}$$

64. $$\left[\begin{array}{c} x + y = a u \\ x^5 + y^5 = b u \\ x y = 2 c \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r + 5c} + \sqrt{r - 3c}\right),\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r + 5c} - \sqrt{r - 3c}\right),$

$$u = \frac{1}{a}\sqrt{r + 5c},\ r = \sqrt{5c^2 + \frac{b}{a}}$$

Man eliminire entweder x und y, und bestimme zuerst u. Dann folgen aus der 1. und 3. Gleichung auch x und y. Oder man eliminire u und suche, da xy gegeben ist, zunächst $x^2 + y^2$. Man erhält

$$x^2 + y^2 = c + r$$

65. $$\left[\begin{array}{c} x\,(y-1)\,(u-1) = 2a \\ x^2\,(y^2-1)\,(u-1)^2 = 4bu \\ x^3\,(y^3-1)\,(u-1)^3 = 6cu^2 \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{a\,(b-r)}{a^2-r},\ y = \frac{b+r}{b-r},\ u = \frac{a^2}{r},\ r = \sqrt{3\,(ac-b^2)}$

Man bestimme zuerst u, indem man x und y eliminirt. Dividirt man die 2. Gleichung durch das Quadrat der 1., so erhält man

$$\frac{y+1}{y-1} = \frac{bu}{a^2},\ \text{also}\ y = \frac{bu+a^2}{bu-a^2}$$

Dividirt man die 3. Gleichung durch den Kubus der 1., so giebt das

$$\frac{y^2+y+1}{(y-1)^2} = \frac{3cu^2}{4a^3}$$

Hierin ist für y der gefundene Werth zu substituiren.

„66.“ $$\left[\begin{array}{c} \frac{x\,(u-1)}{y-1} = a \\ \frac{x^2\,(u^2-1)}{y^2-1} = b \\ \frac{x^3\,(u^3-1)}{y^3-1} = c \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{bt-a}{at-1},\ y = \frac{at+1}{at-1},\ u = \frac{bt+a}{bt-a}$

$$t = \sqrt{\frac{a^3-c}{3a\,(ac-b^2)}}$$

Durch Elimination von x erhält man:

(1) $$\frac{u+1}{u-1}\cdot\frac{y-1}{y+1} = \frac{b}{a^2}$$

(2) $$\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2}\cdot\frac{(y-1)^2}{y^2+y+1} = \frac{c}{a^3}$$

Diese Gleichungen sind bis auf die Bekannten ganz dieselben, welche in II, 326. gelöst sind. Man wird darnach etwa setzen

$$\frac{y+1}{y-1} = at,\ \text{also}\ \frac{u+1}{u-1} = \frac{bt}{a}$$

Das giebt, wie oben angegeben,

$$y = \frac{at+1}{at-1},\ u = \frac{bt+a}{bt-a}$$

Dies ist in (2) einzusetzen, so erhält man t. Darnach ergiebt sich x aus der 1. Gleichung.

Für $a = 31$, $b = 341$, $c = 4681$ erhält man $t = \pm \frac{3}{31}$, also

$$x = 1,\ y = 2,\ u = 32 \text{ oder}$$

$$x = 16,\ y = \tfrac{1}{2},\ u = \tfrac{1}{32}$$

Denkt man y^n für u gesetzt, so ist $\frac{x(y^n - 1)}{y - 1}$ die Summe der Glieder einer geometrischen Reihe, deren erstes Glied x, deren Exponent y und deren Gliederzahl $= n$ ist. Ebenso ist $\frac{x^2(y^{2n} - 1)}{y^2 - 1}$ die Summe der Quadrate der Glieder einer solchen Reihe und $\frac{x^3(y^{3n} - 1)}{y^3 - 1}$ die Summe der Kuben. Mit diesen Gleichungen ist daher folgende Aufgabe gelöst:

> Von einer geometrischen Progression ist die Summe der Glieder $= a$, die Summe der Quadrate derselben $= b$ und die Summe der Kuben $= c$. Wie gross ist das 1. Glied, der Exponent und die Anzahl der Glieder?

Das 1. Glied x und der Exponent y sind oben angegeben. Die Anzahl der Glieder ist n, und $y^n = u$. Es muss die Anzahl demnach sein

$$n = \frac{\log u}{\log y}$$

67. $$\left[\begin{array}{l} \frac{x(u-1)}{y-1} = a \\ \frac{x^2(u^2-1)}{y^2-1} = b \\ \frac{x^4(u^4-1)}{y^4-1} = c \end{array}\right].$$

L. x, y und u sonst wie in 66., nur $t = \sqrt{\frac{a^2b - c}{a^2c - b^3}}$

Mit diesen Gleichungen ist folgende Aufgabe gelöst:

> Von einer geometr. Progr. ist die Summe aller Glieder $= a$, die Summe ihrer Quadrate $= b$ und die Summe ihrer 4. Potenzen $= c$. Wie gross ist das 1. Glied x, der Exponent y und die Anzahl der Glieder n?

Ueber die Deutung der Gleichungen und die Auffindung der Anzahl der Glieder n ist bei der vor. Aufgabe das Nöthige bemerkt.

68. $$\left[\begin{array}{l} \frac{x\,(u-1)}{y-1} = a \\ \frac{x^2\,(u^2-1)}{y^2-1} = b \\ \frac{x^4\,(u^4+1)}{y^4+1} = c \end{array}\right]$$

L. x, y und u sonst wie in 66., nur

$$t = \sqrt{\frac{3a^2\,(b^2-c) + \sqrt{8a^4\,(b^2-c)^2 + (a^4-b^2)^2\,c}}{a^4c - b^4}}$$

Auch diese Gleichungen lassen leicht eine Deutung in Worten zu:

Von einer geometr. Progression ist gegeben die Summe der Glieder $= a$, die Summe ihrer Quadrate $= b$ und der Ueberschuss der Summe der 4. Potenzen der ungeraden Glieder (des 1., 3., 5. u. s. w.) über die Summe der 4. Potenzen der geraden Glieder (des 2., 4., 6. u. s. w.) $= c$. Wie gross ist das 1. Glied x, der Exponent y und die Anzahl der Glieder n?

Vorausgesetzt ist hier, dass die Anzahl der Glieder ungerade ist, so dass die Division

$$\frac{u^4+1}{y^4+1} \text{ d. h. } \frac{y^{4n}+1}{y^4+1}$$

aufgeht. Ueber die Deutung der Gleichungen u. s. w. s. 66.

69. $$\left[\begin{array}{l} \frac{x\,(u-1)}{y-1} = a \\ \frac{x^2\,(u^2-1)}{y^2-1} = b \\ \frac{x^5\,(u^5-1)}{y^5-1} = c \end{array}\right]$$

L. x, y und u sonst ganz wie in 66., nur

$$t = \sqrt{\frac{5a^2\,(ab^2-c) + \sqrt{20a^4\,(ab^2-c)^2 + 5ac\,(a^4-b^2)^2}}{5a\,(a^3c-b^4)}}$$

Ueber die Deutung dieser Gleichungen ist das Nöthige in 66. bemerkt. Die zugehörige Aufgabe wird demnach heissen:

Von einer geometr. Progression ist die Summe aller Glieder $= a$, die Summe ihrer Quadrate $= b$ und die Summe ihrer 5. Potenzen $= c$. Wie gross ist das 1. Glied u. s. w.

70. $$\left[\begin{array}{c} \frac{x^3 - y^3}{(x+y)^3} = \frac{a}{u} \\ \frac{x^3 + y^3}{(x-y)^3} = \frac{u}{b} \\ (x-y)^2 u = c\,(x+y) \end{array}\right]$$

L. $$x = \frac{c}{2b} \cdot \frac{\sqrt{3b} + \sqrt{4a-b} - 2\sqrt{a-b}}{\sqrt{4a-b} - \sqrt{a-b}}$$

$$y = \frac{c}{2b} \cdot \frac{\sqrt{3b} - \sqrt{4a-b} + 2\sqrt{a-b}}{\sqrt{4a-b} - \sqrt{a-b}}$$

$$u = \frac{(\sqrt{4a-b} - \sqrt{a-b})\, b\sqrt{3b}}{(\sqrt{4a-b} - 2\sqrt{a-b})^2}$$

Durch Multiplication der beiden ersten Gleichungen erhält man

$$\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{a}{b}$$

Diese Gleichung ist in II, 265. schon behandelt worden. Man findet daraus

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{\sqrt{4a-b} + 2\sqrt{a-b}}{\sqrt{3b}} = \frac{\sqrt{3b}}{\sqrt{4a-b} - 2\sqrt{a-b}}$$

Hier ist die letzte Formel gewählt und daher gesetzt

$$(1) \qquad \begin{aligned} x + y &= \lambda\ \sqrt{3b} \\ x - y &= \lambda\,(\sqrt{4a-b} - 2\sqrt{a-b}) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(2) \qquad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= \lambda^2 \sqrt{4a-b}\,(\sqrt{4a-b} - 2\sqrt{a-b}) \\ xy &= \lambda^2 \sqrt{a-b}\ \ (\sqrt{4a-b} - 2\sqrt{a-b}) \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) sind in der 2. Gleichung für x und y die gefundenen Ausdrücke zu setzen, so erhält man u, da λ sich heraushebt. Ist u gefunden, so ergiebt sich aus (1) und der 3. Gleichung λ. Dann liefern die Gleichungen (1) die Unbekannten selber.

Anhang.

71. $$\left[\begin{array}{l} cx + (b-a)\,z = yz \\ ay + (c-b)\,x = xz \\ bz + (a-c)\,y = xy \end{array}\right]$$

L. $x = a,\ y = b,\ z = c.$ Dazu noch $x = y = z = 0.$

Die vollständige Auflösung dieser und der folgenden Gleichungen führt auf eine Gleichung des 4. Grades, die Wurzel 0 nicht gerechnet. Denn dass den Gleichungen durch $x = y = z = 0$ genügt wird, übersieht man sofort. — Wegen der Eigenthümlichkeit der Gleichungen lässt sich eine Lösung leicht finden. Man umgeht die Auflösung einer Gleichung des 4. Grades, wenn man die Gleichungen, anstatt nach x, y, z aufzulösen, nach a, b und c auflöst. Man erhält dann direct

$$a = x,\ b = y,\ c = z$$

und damit die Lösung

$$x = a,\ y = b,\ z = c$$

In derselben Weise lassen sich die folgenden Aufgaben dieses Anhangs lösen. Die Wurzel 0 kommt bei allen vor, sie ist der Kürze wegen nicht angeführt.

72. $$\left[\begin{array}{l} a\,x + b\,z - c\,y = x^2 \\ b\,y + c\,x - a\,z = y^2 \\ c\,z + a\,y - b\,x = z^2 \end{array}\right]$$

L. $x = a,\ y = b,\ z = c$

73. $$\left[\begin{array}{l} (a + b)\,(x - y) + 2\,(a - b)\,z = x^2 - y^2 \\ (b + c)\,(y - z) + 2\,(b - c)\,x = y^2 - z^2 \\ (c + a)\,(z - x) + 2\,(c - a)\,y = z^2 - x^2 \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1}{2}(-a + b + c),\ y = \frac{1}{2}(a - b + c),\ z = \frac{1}{2}(a + b - c)$

Hier findet man zunächst $a = y + z,\ b = x + z,\ c = x + y$

74. $$\left[\begin{array}{l} (b + c)\,(x - y) + (a - b)\,y = 2\,(x - y)^2 \\ (c + a)\,(y - z) + (b - c)\,z = 2\,(y - z)^2 \\ (a + b)\,(z - x) + (c - a)\,x = 2\,(z - x)^2 \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1}{2}\,(b + c),\ y = \frac{1}{2}\,(a + c),\ z = \frac{1}{2}\,(a + b)$.

Man findet hier zunächst $a = -x + y + z$ u. s. w.

75. $$\left[\begin{array}{l} (a + b)\,(x + y) - (b + c)\,z = 2\,y\,z \\ (b + c)\,(y + z) - (a + c)\,x = 2\,x\,z \\ (a + c)\,(x + z) - (a + b)\,y = 2\,x\,y \end{array}\right]$$

L. wie in 74.

76. $$\left[\begin{array}{l} 2\,b\,x - (-a + b + c)\,z = 2\,x^2 \\ 2\,c\,y - (a - b + c)\,x = 2\,y^2 \\ 2\,a\,z - (a + b - c)\,y = 2\,z^2 \end{array}\right]$$

L. wie in 73.

77. $\left[\begin{array}{l}(-a+b+2c)x+(a-b+2c)y+(a+b+2c)z=2(x^2+y^2)\\(-a+2b+c)x+(a+2b+c)y+(a+2b-c)z=2(x^2+z^2)\\(2a+b+c)x+(2a-b+c)y+(2a+b-c)z=2(y^2+z^2)\end{array}\right]$

L. $x=b+c,\ y=a+c,\ z=a+b$

Man findet zunächst $a=\frac{1}{2}(-x+y+z)$ u. s. w. Diese Auflösung ist etwas weitläufig. Ordnet man jedoch nach a, b und c, so kommt man leicht darauf, der Abkürzung wegen zu setzen

$$\tfrac{1}{2}(-x+y+z)=X,\ \tfrac{1}{2}(x-y+z)=Y,\ \tfrac{1}{2}(x+y-z)=Z.$$

Dann kann man die Gleichungen auch so schreiben

$$X(a-X)+Y(b-Y)+2(X+Y+Z)(c-Z)=0$$

u. s. w.

Sieht man hierin

$$a-X \qquad b-Y \qquad c-Z$$

als die Unbekannten an, so erkennt man sofort, dass diesen Gleichungen genügt wird durch

$$a-X=0 \qquad b-Y=0 \qquad c-Z=0$$

d. h. $a=X=\frac{1}{2}(-x+y+z)$ u. s. w.

B.

Gleichungen mit vier Unbekannten.

78. $\left[\begin{array}{c}x+y=7\\u+v=3\\x+u^2=8\\y+v^2=4\end{array}\right]$

L. $x=4,\ 7$
$y=3,\ 0$
$u=2,\ 1$
$v=1,\ 2$

Man addire die beiden letzten Gleichungen, so erhält man mit Benutzung der 1. Gleichung $u^2+v^2=5$. Diese mit der 2. Gleichung combinirt, liefert u und v.

79. $\left[\begin{array}{c}x+y=12\\u+v=4\\x^2+u^2=34\\y^2+v^2=50\end{array}\right]$

L. $x=5,\ 5\frac{4}{5}$
$y=7,\ 6\frac{1}{5}$
$u=3,\ \frac{3}{5}$
$v=1,\ 3\frac{2}{5}$

Man eliminire y und v aus der letzten Gleichung mit Hülfe der beiden ersten Gleichungen und combinire das Resultat mit der 3. Gleichung, so kann man x und u bestimmen.

80. $\left[\begin{array}{c} x:y:u:v=(-a+b+c):(a-b+c):(a+b-c):(a+b+c) \\ x^2+y^2+u^2+v^2=m^2 \end{array}\right]$

L. $x=\frac{(-a+b+c)\,m}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $y=\frac{(a-b+c)\,m}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$u=\frac{(a+b-c)\,m}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $v=\frac{(a+b+c)\,m}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Man verfahre ganz wie in 5. und setze

$$x=(-a+b+c)\,t \text{ u. s. w.}$$

„81“. $\left[\begin{array}{c} x+y=a \\ u+v=b \\ xy=uv \\ x^2+y^2+u^2+v^2=c \end{array}\right]$

L. $x=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{c-b^2}\right)$ $\quad y=\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{c-b^2}\right)$

$u=\frac{1}{2}\left(b+\sqrt{c-a^2}\right)$ $\quad v=\frac{1}{2}\left(b-\sqrt{c-a^2}\right)$

Man bestimme zunächst das Product, setze also

$$xy=uv=t$$

Quadrirt man darnach die beiden ersten Gleichungen, so erhält man mit Benutzung der vierten

$$4t=a^2+b^2-c, \text{ d. h.}$$

$$4xy=a^2+b^2-c \text{ und } 4uv=a^2+b^2-c$$

Diese Gleichungen sind mit der 1. und 2. zu combiniren.

Diese und die folgenden Aufgaben, in welchen die Gleichheit zweier Producte aus je zwei Unbekannten vorkommt, lassen sich leicht in Worte kleiden. Aus

$$xy=uv$$

folgt die geometrische Proportion

$$x:u=v:y$$

Für die vorliegenden Gleichungen 81. hat man also:

Vier Grössen bilden eine Proportion. Die Summe der äusseren Glieder ist $=a$, die Summe der inneren $=b$ und die Summe der Quadrate aller Glieder $=c$. Wie heissen die vier Grössen? — Die 1. Grösse heisst $x=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{c-b^2}\right)$, die 2. Grösse

$u = \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{c - a^2}\right)$, die dritte Grösse $v = \frac{1}{2}\left(b - \sqrt{c - a^2}\right)$ die 4. Grösse $y = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{c - b^2}\right)$.

„82“. $\left[\begin{array}{c} x + y = a \\ u + v = b \\ xy = uv \\ x^3 + y^3 + u^3 + v^3 = c \end{array}\right]$

L. $x = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 - 4t}\right) \qquad y = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - 4t}\right)$

$u = \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2 - 4t}\right) \qquad v = \frac{1}{2}\left(b - \sqrt{b^2 - 4t}\right)$

$$t = \frac{a^3 + b^3 - c}{3\,(a + b)}$$

Man verfahre ganz wie in der vor. Aufgabe. Zunächst ist $xy = uv = t$ zu bestimmen. Aus der Addition der Gleichungen

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y)$$

$$(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv\,(u + v)$$

folgt mit Benutzung der gegebenen Gleichungen

$$a^3 + b^3 = c + 3\,(a + b)\,t \text{ u. s. w.}$$

In Worten: Vier Grössen bilden eine Proportion, $x : u = v : y$. Die Summe der äussern Glieder ist $= a$, die Summe der innern $= b$ und die Summe der Kuben aller 4 Glieder $= c$. Wie heissen die vier Grössen?

83. $\left[\begin{array}{c} x + y = a \\ u + v = b \\ xy = uv \\ x^4 + y^4 + u^4 + v^4 = c \end{array}\right]$

L. sonst wie in 82., nur

$$t = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2 + c}\right)$$

Man hat hier

$$(x + y)^4 = x^4 + y^4 + 4xy\,(x + y)^2 - 2x^2y^2 \text{ u. s. w.}$$

(vgl. I, 376.)

In Worten: Die Summe der äussern Glieder einer Proportion ist $= a$, die Summe der innern Glieder $= b$, die Summe aller 4. Potenzen $= c$. Wie heissen die Glieder der Proportion? — x, u, v, y.

84. $$\left[\begin{array}{c} x + y = a \\ u + v = b \\ xy = uv \\ x^5 + y^5 + u^5 + v^5 = c \end{array}\right]$$

L. wie in 82., nur

$$t = \frac{5\,(a^3 + b^3) + \sqrt{5\,(a^3 + b^3)^2 - 20\,ab\,(a^2 - b^2)^2 + 20\,(a + b)\,c}}{10\,(a + b)}$$

Hier ist ebenfalls die in I, 376. angegebene Formel zu benutzen

$$(x + y)^5 = x^5 + y^5 + 5\,(x + y)^3\,xy - 5\,(x + y)\,x^2y^2$$

In Worten: Die Summe der äussern Glieder einer Proportion ist $= a$, die der innern $= b$, die Summe der 4. Potenzen der 4 Glieder $= c$. Wie heissen diese Glieder? — x, u, v, y.

85. $$\left[\begin{array}{c} xy = uv \\ x + y = a \\ u + v = b \\ ux + vy = c \end{array}\right]$$

L. wie in 82., nur

$$t = \tfrac{1}{8}\left(a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 16\,c\,(c - ab)}\right)$$

86. $$\left[\begin{array}{c} xy = uv \\ x + y = a \\ u + v = b \\ \frac{x + u}{y + v} = c \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{(ac - b)\,c}{c^2 - 1}$, $y = \frac{bc - a}{c^2 - 1}$, $u = \frac{(bc - a)\,c}{c^2 - 1}$, $v = \frac{ac - b}{c^2 - 1}$

Das System kann nur als quadratisch angesehen werden, wenn man auch die Wurzel ∞ gelten lässt.

In Worten: Wie heissen die Glieder einer Proportion, wenn die Summe der äussern Glieder $= a$, die der innern $= b$ und der Quotient aus der Summe der beiden ersten Glieder durch die Summe der beiden letzten Glieder $= c$ ist? — x, u, v, y.

87. $$\left[\begin{array}{c} x + y = a \\ u + v = b \\ x^2 + u^2 = c \\ y^2 + v^2 = d \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1}{2}(a + t)$, $y = \frac{1}{2}(a - t)$, $u = \frac{1}{2}(b + t_1)$, $v = \frac{1}{2}(b - t_1)$

$$t = \frac{a(c-d) + br}{a^2 + b^2}, \quad t_1 = \frac{b(c-d) - ar}{a^2 + b^2}$$

$$r = \sqrt{4cd - (a^2 + b^2 - c - d)^2}$$

Hier ist gesetzt $x - y = t$ und $u - v = t_1$. Sind dann mit Hülfe der beiden ersten Gleichungen die Unbekannten durch t und t_1 ausgedrückt, so sind die Werthe zu substituiren in den beiden letzten Gleichungen. Daraus folgen dann t und t_1.

88. $$\left[\begin{array}{c} x^2 + y^2 = a \\ u^2 + v^2 = b \\ xy = uv \\ x + y + u + v = c \end{array}\right]$$

L. $$x = \frac{\sqrt{a+t} + \sqrt{a-t}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{a+t} - \sqrt{a-t}}{2}$$

$$u = \frac{\sqrt{b+t} + \sqrt{b-t}}{2}, \quad v = \frac{\sqrt{b+t} - \sqrt{b-t}}{2}$$

$$t = \frac{c^4 - 2(a+b)c^2 + (a-b)^2}{4c^2}$$

Hier ist gesetzt $2xy = 2uv = t$. Das liefert für t die Gleichung

$$\sqrt{a+t} + \sqrt{b+t} = c$$

Ist t gefunden, so ergeben sich mit Hülfe der beiden ersten Gleichungen die Unbekannten selber.

„89“. $$\left[\begin{array}{c} xy = uv = a \\ x + y + u + v = b \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = c \end{array}\right]$$

L. $$x = \tfrac{1}{4}\left(b + t + \sqrt{(b+t)^2 - 16a}\right), \quad y = \tfrac{1}{4}\left(b + t - \sqrt{(b+t)^2 - 16a}\right)$$

$$u = \tfrac{1}{4}\left(b - t + \sqrt{(b-t)^2 - 16a}\right), \quad v = \tfrac{1}{4}\left(b - t - \sqrt{(b-t)^2 - 16a}\right)$$

$$t = \sqrt{8a - b^2 + 2c}$$

Hier ist gesetzt $(x + y) - (u + v) = t$ und dies zunächst bestimmt. Mit Hülfe der 2. Bedingung hat man

(1) $$x + y = \frac{b+t}{2}, \quad u + v = \frac{b-t}{2}$$

Diese beiden Gleichungen, quadrirt und addirt, liefern, wenn man die 1. und 3. Bedingung benutzt, die Gleichung für t. Combinirt man die Gleichungen (1) bezüglich mit

$$xy = a \text{ und } uv = a,$$

so erhält man die Unbekannten selber, wie angegeben.

In Worten: In einer Proportion ist das Product der äussern oder innern Glieder $= a$, die Summe aller Glieder $= b$, die Summe ihrer Quadrate $= c$. Wie heissen die Glieder? — x, u, v, y.

„90“. $$\left[\begin{array}{c} xy = uv = a \\ x + y + u + v = b \\ x^3 + y^3 + u^3 + v^3 = c \end{array}\right]$$

L. wie in 89., nur

$$t = \sqrt{\frac{12ab - b^3 + 4c}{3b}}$$

Die Auflösung geschieht in derselben Weise, wie bei 89. Man benutzt hier, wie bei den beiden folgenden Aufgaben zweckmässig die in I, 376. angegebenen Binomialformeln, von denen auch schon in 82., 83. und 84. Gebrauch gemacht ist.

In Worten: In einer Proportion ist das Product der äussern oder innern Glieder $= a$, die Summe aller Glieder $= b$, die Summe ihrer Kuben $= c$. Wie heissen die Glieder derselben? — x, u, v, y.

91. $$\left[\begin{array}{c} xy = uv = a \\ x + y + u + v = b \\ x^4 + y^4 + u^4 + v^4 = c \end{array}\right]$$

L. wie in 89., nur

$$t = \sqrt{8a - 3b^2 + 2\sqrt{2\,(2a - b^2)^2 + 2c}}$$

In Worten: Wie heissen die 4 Glieder einer Proportion, in der das Product der innern oder äussern Glieder $= a$, die Summe aller Glieder $= b$ und die Summe ihrer 4. Potenzen $= c$ ist? — x, u, v, y.

92. $$\left[\begin{array}{c} xy = uv = a \\ x + y + u + v = b \\ x^5 + y^5 + u^5 + v^5 = c \end{array}\right]$$

L. wie in 89., nur

$$t = \sqrt{6a - b^2 + 2\sqrt{\frac{(5a - b^2)^2\, b + 4c}{5b}}}$$

In Worten: Wie heissen die 4 Glieder einer Proportion, in welcher das Product der innern oder äussern Glieder $= a$, die Summe aller Glieder $= b$ und die Summe ihrer 5. Potenzen $= c$ ist? — x, u, v, y.

93. $$\left[\begin{array}{c} xy = uv = a \\ x + u = b \\ y + v = c \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1}{2}b(1 + r)$, $y = \frac{1}{2}c(1 - r)$, $u = \frac{1}{2}b(1 - r)$, $v = \frac{1}{2}c(1 + r)$

$$r = \sqrt{1 - \frac{4a}{bc}}$$

Aus der 1. Bedingung hat man

$$x = \frac{uv}{y}$$

Dies in der 2. Gleichung substituirt, giebt mit Benutzung der 3. Gleichung

$$\frac{u}{y} = \frac{b}{c}$$

Daher setzt man am einfachsten

$$u = b\lambda \qquad y = c\lambda$$

Wegen der beiden letzten Gleichungen hat man dann auch

$$x = b\,(1 - \lambda) \qquad v = c\,(1 - \lambda)$$

Diese Werthe sind in der 1. Gleichung zu substituiren, so erhält man λ.

In Worten: In einer Proportion ist das Product der äussern oder innern Glieder $= a$, die Summe der beiden ersten Glieder $= b$ und die Summe der beiden letzten $= c$. Wie heissen diese Glieder? — x, u, v, y.

94. $$\left[\begin{array}{c} xy = uv = a \\ x + y + u + v = b \\ (x+u)^2 + (y+v)^2 = c \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1}{4}(b+t)(1+r)$ $\quad y = \frac{1}{4}(b-t)(1-r)$

$u = \frac{1}{4}(b+t)(1-r)$ $\quad v = \frac{1}{4}(b-t)(1+r)$

$$t = \sqrt{2c - b^2} \qquad r = \sqrt{1 - \frac{8a}{b^2 - c}}$$

Hier ist $(x+u) - (y+v) = t$ gesetzt. Dann hat man wegen der 2. Bedingung

(1) $\quad x + u = \frac{1}{2}(b+t)$ $\quad y + v = \frac{1}{2}(b-t)$

Diese Gleichungen, quadrirt und addirt, liefern mit Benutzung der 3. Bedingung den Werth für t. Damit ist dann wegen der 1. Bedingung und wegen der Gleichungen (1) diese Aufgabe auf die vorige reducirt.

In Worten: Das Product der äussern oder innern Glieder einer Proportion ist $= a$, die Summe aller Glieder $= b$, summirt man das Quadrat der Summe der beiden ersten Glieder und das der Summe der beiden letzten, so giebt das c. Wie heissen die Glieder? — x, u, v, y.

95. $$\left[\begin{array}{c} xy = uv = a \\ x + y + u + v = b \\ (x+u)^3 + (y+v)^3 = c \end{array}\right]$$

L. wie in 94., nur

$$t = \sqrt{\frac{4c - b^3}{3b}}, \quad r = \sqrt{1 - \frac{12ab}{b^3 - c}}$$

96. $$\left[\begin{array}{c} xy = uv = a \\ x + y + u + v = b \\ (x+u)^4 + (y+v)^4 = c \end{array}\right]$$

L. wie in 94., nur

$$t = \sqrt{-3b^2 + 2\sqrt{2(b^4 + c)}} \qquad r = \sqrt{1 - \frac{16a}{b^2 - t^2}}$$

In Worten: Das Product der äussern oder innern Glieder einer Proportion ist $= a$, die Summe aller Glieder $= b$ und die Summe der 4. Potenzen der Summe der beiden ersten und derjenigen der beiden letzten Glieder $= c$. Wie heissen die Glieder? — x, u, v, y.

97. $$\left[\begin{array}{c} xy = uv \\ x + y + u + v = a \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = b \\ x^3 + y^3 + u^3 + v^3 = c \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1}{4}\left(a + r + \sqrt{(a + r)^2 - 16t}\right)$

$$y = \frac{1}{4}\left(a + r - \sqrt{(a + r)^2 - 16t}\right)$$
$$u = \frac{1}{4}\left(a - r + \sqrt{(a - r)^2 - 16t}\right)$$
$$v = \frac{1}{4}\left(a - r - \sqrt{(a - r)^2 - 16t}\right)$$

$$r = \sqrt{\frac{a^3 - 6ab + 8c}{3a}} \qquad t = \frac{a^3 - 3ab + 2c}{6a}$$

Hier ist gesetzt

(1) $$xy = uv = t$$

(2) $$(x + y) - (u + v) = r$$

Nachdem die Unbekannten aus den beiden ersten Gleichungen durch t und r bestimmt sind, wie in der Lösung angegeben, erhält man aus den beiden letzten Gleichungen für t und r

(3) $$\left[\begin{array}{c} a^2 + r^2 = 2(b + 4t) \\ a^3 + 3ar^2 = 4(c + 3at) \end{array}\right]$$

Es ist nämlich mit Hülfe von (2)

$$x + y = \frac{1}{2}(a + r) \qquad u + v = \frac{1}{2}(a - r)$$

Diese Gleichungen sind erstens zu quadriren, zweitens zu kubiren und in beiden Fällen die gegebenen Gleichungen, wie die Gleichung (1) zu benutzen, so erhält man die Gleichungen (3), aus welchen r und t zu bestimmen sind.

Einkleidung der Aufgabe: In einer Proportion ist die Summe der 4 Glieder $= a$, die Summe ihrer Quadrate $= b$, die Summe ihrer Kuben $= c$. Wie heisst die Proportion? — $x : u = v : y$

98. $$\left[\begin{array}{c} xy = uv \\ x + y + u + v = a \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = b \\ x^4 + y^4 + u^4 + v^4 = c \end{array}\right]$$

L. wie in 97, nur

$$r = \sqrt{3a^2 + 2b + 4r_1}, \quad t = \frac{1}{2}(a^2 + r_1), \quad r_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b)^2 - c}$$

Die Gleichungen für r und t werden hier

$$\left[\begin{array}{c} a^2 + r^2 = 2\,(b + 4t) \\ a^4 + 6\,a^2r^2 + r^4 = 8\,(c + 2\,(a^2 + r^2)\,t - 4\,t^2) \end{array}\right]$$

Einkleidung: In einer Proportion ist die Summe der 4 Glieder $= a$, die Summe ihrer Quadrate $= b$, die Summe ihrer Biquadrate $= c$. Wie heisst dieselbe? — $x : u = v : y$.

99. $$\left[\begin{array}{c} xy = uv \\ x + y + u + v = a \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = b \\ x^5 + y^5 + u^5 + v^5 = c \end{array}\right]$$

L. wie in 97., nur

$$r = \sqrt{a^2 + 4b + 2r_1} \qquad t = \tfrac{1}{4}\,(a^2 + b + r_1)$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{a\,(a^2 + 5b)^2 - 16c}{5a}}$$

Die zweite Gleichung für r und t wird hier

$$\tfrac{1}{16}\,(a^5 + 10\,a^3r^2 + 5\,ar^4) = c + \tfrac{5}{4}\,(a^3 + 3\,ar^2)\,t - 5\,at^2$$

Einkleidung: In einer Proportion ist die Summe der 4 Glieder $= a$, die Summe ihrer Quadrate $= b$, die Summe ihrer 5. Potenzen $= c$. Wie heisst dieselbe? — $x : u = v : y$.

100. $$\left[\begin{array}{c} xy = uv \\ x + y + u + v = a \\ x^3 + y^3 + u^3 + v^3 = b \\ x^4 + y^4 + u^4 + v^4 = c \end{array}\right]$$

L. wie in 97., nur

$$r = \sqrt{a^2 + \frac{4r_1}{3a}} \qquad t = \frac{a^3 - b + r_1}{3a}$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{(a^3 + 2b)^2 - 9a^2c}{2}}$$

Die Gleichungen für r und t werden hier

$$\left[\begin{array}{c} \tfrac{1}{4}\,(a^3 + 3\,ar^2) = b + 3\,at \\ \tfrac{1}{8}\,(a^4 + 6\,a^2r^2 + r^4) = c + 2t\,(a^2 + r^2) - 4\,t^2 \end{array}\right]$$

Einkleidung: In einer Proportion ist die Summe der 4 Glieder $= a$, die Summe ihrer Kuben $= b$, die Summe ihrer Biquadrate $= c$. Wie heisst dieselbe?

101. $$\left[\begin{array}{c} xy = uv \\ x + y + u + v = a \\ x^3 + y^3 + u^3 + v^3 = b \\ x^5 + y^5 + u^5 + v^5 = c \end{array}\right]$$

L. wie in 97., nur

$$r = \sqrt{\frac{a^3 + 2b + 2r_1}{3a}} \qquad t = \frac{a^3 - b + r_1}{6a}$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{(a^3 + 5b)^2 - 36ac}{5}}$$

Die Gleichungen für r und t werden hier

$$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{4}(a^3 + 3ar^2) = b + 3at \\ \frac{1}{16}(a^5 + 10a^3r^2 + 5ar^4) = c + \frac{5}{4}(a^3 + 3ar^2)\,t - 5at^2 \end{array}\right]$$

Einkleidung: In einer Proportion ist die Summe aller 4 Glieder $= a$, die Summe ihrer Kuben $= b$, die Summe ihrer 5. Potenzen $= c$. Wie heisst dieselbe? — $x : u = v : y$

102. $$\left[\begin{array}{c} xy = uv \\ x + y + u + v = a \\ ux + vy = b \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = c \end{array}\right]$$

L. $$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}(1 + t)(a + t_1) \\ y = \frac{1}{4}(1 - t)(a - t_1) \\ u = \frac{1}{4}(1 - t)(a + t_1) \\ v = \frac{1}{4}(1 + t)(a - t_1) \end{array}\right\} t = \sqrt{\frac{c-2b}{c+2b}} \quad t_1 = \sqrt{2c+4b-a^2}$$

Aus der 1. Gleichung ergiebt sich die Proportion

$$x : u = v : y,$$

man kann also setzen

$$\frac{x}{u} = \frac{v}{y} = z,$$

(1) d. h. $x = uz \qquad v = yz$

Dadurch gehen die drei letzten Gleichungen über in

$$\left[\begin{array}{ll} (2) & u + y = \frac{a}{1+z} \\ (3) & u^2 + y^2 = \frac{b}{z} \\ (4) & u^2 + y^2 = \frac{c}{1+z^2} \end{array}\right]$$

Die Gleichung für z wird demnach

$$(5) \qquad \frac{b}{z} = \frac{c}{1+z^2}, \text{ oder } \frac{1+z^2}{2z} = \frac{c}{2b} \text{ (vgl. I, 153.)}$$

$$(6) \qquad \frac{1-z}{1+z} = \sqrt{\frac{c-2b}{c+2b}}$$

Der Einfachheit halber ist dieser Ausdruck $= t$ gesetzt, also

$$(7) \qquad t = \sqrt{\frac{c-2b}{c+2b}}$$

Nach (6) ist daher

$$(8) \qquad \frac{1-z}{1+z} = t$$

$$(9) \qquad z = \frac{1-t}{1+t}$$

Da z hiermit gefunden ist, so sind noch u und y zu suchen aus (2) und (3). Man hat zunächst

$$(10) \quad u - y = \sqrt{\frac{2b}{z} - \frac{a^2}{(1+z)^2}} = \frac{1}{1+z}\sqrt{4b - a^2 + 2b\left(\frac{1}{z}+z\right)}$$

Nun ist wegen (5)

$$\frac{1}{z} + z = \frac{1+z^2}{z} = \frac{c}{b}, \text{ also}$$

$$(11) \qquad u - y = \frac{1}{1+z}\sqrt{4b - a^2 + 2c}$$

Die Wurzelgrösse ist der Einfachheit halber $= t_1$ gesetzt, so dass man hat wegen (2) und (11)

$$(12) \qquad \begin{bmatrix} u + y = \dfrac{a}{1+z} \\ u - y = \dfrac{t_1}{1+z} \end{bmatrix}$$

Nach (9) ist aber

$$1 + z = \frac{2}{1+t}$$

Mithin geht (12) über in

$$\begin{bmatrix} u + y = \frac{1}{2}\, a\, (1+t) \\ u - y = \frac{1}{2}\, t_1\, (1+t) \end{bmatrix}$$

Hieraus endlich

$$(13) \qquad \begin{aligned} u &= \tfrac{1}{4}\,(a + t_1)\,(1+t) \\ y &= \tfrac{1}{4}\,(a - t_1)\,(1+t) \end{aligned}$$

Nach (1) hat man daher für die andern Unbekannten und mit Benutzung von (9)

$$(14) \qquad \begin{aligned} x = uz &= u \cdot \frac{1-t}{1+t} = \tfrac{1}{4}\,(a + t_1)\,(1-t) \\ v = yz &= y \cdot \frac{1-t}{1+t} = \tfrac{1}{4}\,(a - t_1)\,(1-t) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (13) und (14) liefern die Unbekannten, wie ben angegeben. Die Zeichen von t und t_1 sind beliebig, so dass man hat z. B. für x

$$\tfrac{1}{4}(1+t)(a+t_1) \quad \tfrac{1}{4}(1-t)(a+t_1) \quad \tfrac{1}{4}(1+t)(a-t_1) \quad \tfrac{1}{4}(1-t)(a-t_1)$$

und entsprechend die andern Unbekannten.

Die Auflösung wäre einfacher geworden, wenn man gleich von vorn herein

$$\frac{x}{u} = \frac{v}{y} = \frac{1+t}{1-t},$$

also

$$x = \lambda(1+t) \qquad v = \lambda_1(1+t)$$
$$u = \lambda(1-t) \qquad y = \lambda_1(1-t)$$

gesetzt und die Grössen t, λ und λ_1 bestimmt hätte. Dass aber gerade diese Substitution zu machen war, um die Auflösung möglichst einfach zu bewerkstelligen, war nicht leicht zu übersehen; die oben gemachte lag wenigstens näher.

Auch diese Aufgabe lässt sich leicht in Worte kleiden:

> Die Summe aller Glieder einer geometrischen Proportion ist $= a$, die Summe der Producte aus den Gliedern je eines Verhältnisses $= b$, die Summe der Quadrate aller Glieder $= c$. Wie heisst die Proportion? — $x : u = v : y$.

103.
$$\left[\begin{array}{c} xy = uv \\ x + y + u + v = a \\ ux + vy = b \\ x^3 + y^3 + u^3 + v^3 = c \end{array}\right]$$

L. sonst wie in 102., nur

$$t = \sqrt{\frac{a^3 - 18ab - 4c + 2r}{3a^3}} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{-2a^3 + 9ab + 2c + r}{3a}}$$

$$r = \sqrt{a^2(a^2 - 9b)^2 + 4c(a^3 + 9ab + c)}$$

Man schlage den in 102. angegebenen Weg ein. Die dort der Gleichung (4) entsprechende wird hier

$$u^3 + y^3 = \frac{c}{1+z^3}$$

Man findet dann für z durch Elimination von u und y die Gleichung

$$\frac{a^2}{(1+z)^2} + \frac{2c}{a} \cdot \frac{1}{1-z+z^2} = \frac{3b}{z}$$

Um hieraus z zu bestimmen hat man wie in der vor. Aufgabe oder nach I, 394. (11) zu setzen

$$z = \frac{1+t}{1-t}.$$

In Worten: Die Summe der 4 Glieder einer Proportion ist $= a$, die Summe der Producte aus den beiden Gliedern je eines Verhältnisses $= b$, die Summe der Kuben aller Glieder $= c$. Wie heisst die Proportion? — $x : u = v : y$.

104.
$$\left[\begin{array}{c} x + y = a \\ u + v = b \\ xy + uv = c \\ xu + yv = d \end{array}\right].$$

L.
$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}(2a + t + t_1) \\ y = \frac{1}{4}(2a - t - t_1) \\ u = \frac{1}{4}(2b - t + t_1) \\ v = \frac{1}{4}(2b + t - t_1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} t = \sqrt{(a+b)^2 - 4(c+d)} \\ t_1 = \sqrt{(a-b)^2 - 4(c-d)} \end{array}$$

Die Grössen t und t_1 können jede für sich oder beide ihr Zeichen ändern, so dass im Ganzen 4 Wurzelsysteme entstehen.

Für die Auflösung hat man

$$(x + v) + (y + u) = a + b$$
$$(x + v) \cdot (y + u) = c + d$$

Daraus folgt

$$x + v - (y + u) = t$$

Ebenso findet man

$$x - v - (y - u) = t_1 \text{ u. s. w.}$$

105.
$$\left[\begin{array}{c} x^2 + y^2 = a \\ u^2 + v^2 = b \\ xy + uv = c \\ xu + yv = d \end{array}\right]$$

L.
$$x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a + c + t} + \sqrt{a - c - t}\right)$$
$$y = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a + c + t} - \sqrt{a - c - t}\right)$$
$$u = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{b + c - t} + \sqrt{b - c + t}\right)$$
$$v = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{b + c - t} - \sqrt{b - c + t}\right)$$
$$t = \frac{(a^2 - b^2)\,c + 2d\sqrt{(ab - d^2)[(a-b)^2 - 4(c^2 - d^2)]}}{(a-b)^2 + 4d^2}$$

Man setze $xy - uv = t$, so folgen mit Hülfe der drei ersten Gleichungen die für die Unbekannten angegebenen Formeln. Dann

bestimmt sich t aus der 4. Gleichung, indem man hier für die Unbekannten die gefundenen Ausdrücke setzt. Die Gleichung für t wird

$$\sqrt{(a+c+t)(b+c-t)} + \sqrt{(a-c-t)(b-c+t)} = 2d$$

106. $$\left[\begin{array}{c} x^2 + y^2 = a \\ u^2 + v^2 = b \\ ux + vy = c \\ vx + uy = d \end{array}\right]$$

L.
$$x = \sqrt{\frac{ab+ct+dt_1}{2b}} \qquad y = \sqrt{\frac{ab-ct-dt_1}{2b}}$$

$$u = \sqrt{\frac{ab+ct-dt_1}{2a}} \qquad v = \sqrt{\frac{ab-ct+dt_1}{2a}}$$

$$t = \sqrt{ab-d^2} \qquad t_1 = \sqrt{ab-c^2}$$

Hier ist gesetzt

$$ux - vy = t$$

$$vx - uy = t_1$$

Dann bestimmen sich die neuen Unbekannten leicht und mit ihrer Hülfe auch die ursprünglichen Unbekannten. — Sucht man zunächst die Producte xy und uv, so erhält man folgende Formeln für die Unbekannten:

$$x = \frac{1}{2\sqrt{b}}\left(\sqrt{ab+cd+r} + \sqrt{ab-cd-r}\right),$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{b}}\left(\sqrt{ab+cd+r} - \sqrt{ab-cd-r}\right),$$

$$u = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\sqrt{ab+cd-r} + \sqrt{ab-cd+r}\right),$$

$$v = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\sqrt{ab+cd-r} - \sqrt{ab-cd+r}\right),$$

$$r = \sqrt{(ab-c^2)(ab-d^2)}$$

Man findet nämlich

$$2xy = \frac{cd+r}{b} \qquad 2uv = \frac{cd-r}{a}$$

107. $$\left[\begin{array}{c} x^2 + y^2 = a \\ u^2 + v^2 = b \\ xy + uv = c \\ xyuv = d \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a+c+t} + \sqrt{a-c-t}\right)$
$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a+c+t} - \sqrt{a-c-t}\right)$
$u = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b+c-t} + \sqrt{b-c+t}\right)$
$v = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b+c-t} - \sqrt{b-c+t}\right)$
$t = xy - uv = \sqrt{c^2 - 4d}$

108.
$$\left[\begin{array}{c} x^2 + y^2 = a \\ u^2 + v^2 = b \\ xy + uv = c \\ x + y + u + v = d \end{array}\right]$$

L. sonst wie in 107., nur

$$t = \frac{-a + b + d\sqrt{2(a+b+2c) - d^2}}{2}$$

Hier ist t zu bestimmen aus der Gleichung

$$\sqrt{a+c+t} + \sqrt{b+c-t} = d$$

109.
$$\left[\begin{array}{c} \frac{2x}{1+x^2} = y \\ \frac{2y}{1+y^2} = u \\ \frac{2u}{1+u^2} = v \\ \frac{2v}{1+v^2} = a \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1-t}{1+t}$, $y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $u = \frac{1-t^4}{1+t^4}$, $v = \frac{1-t^8}{1+t^8}$

$$t = \sqrt[16]{\frac{1-a}{1+a}}$$

Indem man von der 4. Gleichung ausgeht, hat man mit Hülfe der corr. Addition

$$\frac{1+v}{1-v} = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$$
$$\frac{1+u}{1-u} = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} = \sqrt[4]{\frac{1+a}{1-a}} \text{ u. s. w.}$$

110.
$$\left[\begin{array}{c} x + y = u \\ x + u = v \\ \frac{x-y}{u-v} = a \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 3m^2 \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{m}{\sqrt{a^2+4a+5}}$, $y = (a+1)x$, $u = (a+2)x$, $v = (a+3)x$

111. $$\left[\begin{array}{c} x + y = v \\ x + u = y \\ \frac{3x - v}{3y - u} = a \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 15m^2 \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{(2a+1)\ m}{\sqrt{a^2+1}}$, $y = \frac{(2-a)m}{\sqrt{a^2+1}}$, $u = \frac{(1-3a)m}{\sqrt{a^2+1}}$, $v = \frac{(a+3)\ m}{\sqrt{a^2+1}}$

112. $$\left[\begin{array}{c} (x + y)^2 + (u + v)^2 = a \\ (x + u)^2 + (y + v)^2 = b \\ (x + v)^2 + (y + u)^2 = c \\ x + y + u + v = m \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{1}{4}\left(m + \sqrt{2a - m^2} + \sqrt{2b - m^2} + \sqrt{2c - m^2}\right)$
$y = \frac{1}{4}\left(m + \sqrt{2a - m^2} - \sqrt{2b - m^2} - \sqrt{2c - m^2}\right)$
$u = \frac{1}{4}\left(m - \sqrt{2a - m^2} + \sqrt{2b - m^2} - \sqrt{2c - m^2}\right)$
$v = \frac{1}{4}\left(m - \sqrt{2a - m^2} - \sqrt{2b - m^2} + \sqrt{2c - m^2}\right)$

Man kann jede Wurzelgrösse einzeln oder mehrere zugleich auch mit dem entgegengesetzten Zeichen nehmen. Das giebt im Ganzen 8 Lösungen. — Um die angegebenen Formeln für die Unbekannten zu erhalten, hat man die letzte Gleichung mit jeder der drei ersten der Reihe nach zu combiniren. Da kommt

$$(x + y) - (u + v) = \sqrt{2a - m^2} \text{ u. s. w.}$$

113. $$\left[\begin{array}{c} \frac{x}{y+z} = \frac{u-a}{a},\ \frac{y}{x+z} = \frac{u-b}{b},\ \frac{z}{x+y} = \frac{u-c}{c}, \\ (a + b + c)^2 (x^2 + y^2 + z^2) + 4 (x + y + z)^2 u^2 = m^2 \end{array}\right]$$

L. $x = \frac{(-a + b + c)\ m}{2 (a + b + c) \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$y = \frac{(a - b + c)\ m}{2 (a + b + c) \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$z = \frac{(a + b - c)\ m}{2 (a + b + c) \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $u = \frac{a+b+c}{2}$

Man bildet zunächst

$$\frac{x + y + z}{y + z} = \frac{u}{a}, \text{ also } \frac{y + z}{x + y + z} = \frac{a}{u} \text{ u. s. w.}$$

Die Addition der so erhaltenen Gleichungen liefert u. Ferner folgt aus der Combination derselben

$$x = \frac{-a + b + c}{a + b + c}(x + y + z) \text{ u. s. w.}$$

Da u bekannt ist, so ergiebt sich die Summe $x + y + z$ aus der 4. Gleichung.

114. $$\left[\begin{array}{c} \frac{x}{y+z} = \frac{2a-u}{a-2u} \\ \frac{y}{x+z} = \frac{2b-u}{b-2u} \\ \frac{z}{x+y} = \frac{2c-u}{c-2u} \\ x^2 + y^2 + z^2 = m^2 \end{array}\right]$$

L. $$x = \frac{Am}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad A = \frac{2a-u}{3(a-u)}$$

$$y = \frac{Bm}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad B = \frac{2b-u}{3(b-u)}$$

$$z = \frac{Cm}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad C = \frac{2c-u}{3(c-u)}$$

$$u = \frac{ab+ac+bc+\sqrt{(ab+ac+bc)^2-3abc(a+b+c)}}{a+b+c}$$

Man hat zunächst

(1) $$\frac{x}{x+y+z} = \frac{2a-u}{3(a-u)} \text{ u. s. w.}$$

Die Addition der so umgeformten Gleichungen liefert

$$1 = \frac{2a-u}{3(a-u)} + \frac{2b-u}{3(b-u)} + \frac{2c-u}{3(c-u)}$$

Da $2a-u = a-u+a$ u. s. w. ist, so lässt sich diese Gleichung auch so schreiben:

$$0 = \frac{a}{a-u} + \frac{b}{b-u} + \frac{c}{c-u}$$

Sie liefert u, wie oben angegeben. Ist u gefunden, so folgt aus (1) weiter

(2) $$x = A(x+y+z) \text{ u. s. w.,}$$

wo die Grössen A, B, C die oben in der Lösung angegebene Bedeutung haben. Die Werthe für x, y, z in (2) sind in der 4. der gegebenen Gleichungen zu substituiren, so erhält man

$$x+y+z = \frac{m}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

und daher wegen (2) die Unbekannten selber, wie angegeben.

Berichtigungen.

1. S. 14 Nr. 80 l. Jetzt zieht man statt Man zieht
2. S. 98 Nr. 442 l. $= \frac{m^2}{m-1}$ statt $-\frac{m^2}{m-1}$.
3. S. 135 Nr. 85 ist überall $+\sqrt{b}$ statt $-\sqrt{b}$, und $-\sqrt{b}$ statt $+\sqrt{b}$ zu setzen.
4. S. 145 Nr. 135 l. $2\sqrt[4]{4ac-3a^2}$ statt $2\sqrt{4ac-3a^2}$.
5. S. 168. Nr. 226 l.

$$y = \frac{u}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{4a}{u}}\right) \text{ statt } y = \frac{u}{2}\left(1-\sqrt{-\frac{4a}{u}}\right).$$

6. S. 240 Nr. 2 l. $+4$, statt $+4_1$.
7. S. 240 Nr. 2 l. -2, statt -2_1.
8. S. 240 Nr. 2 l. -1, statt -1_1.

STAATSBIBLIOTHEK
BAMBERG

Stadtbibliothek
Bremen

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bardey, Ernst,

Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung

Leipzig 1868

Bamberg, Staatsbibliothek -- AGB P 9
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11421402-9